FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

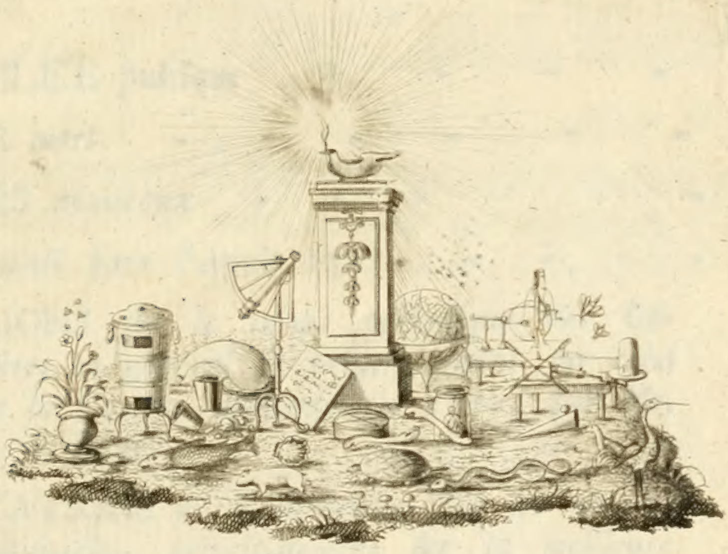
LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

---

pro Anno MDCCLXXVIII.

PARS POSTERIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXI.

16.70290 Aprie 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXVIII. Juillet —— Décembre.

avec trois planches.

Page

ASSEMBLE'E *publique* - - - - - 3.

ASSOCIÉ *mort* - - - - - - - 5.

ASSOCIÉS *nouveaux* - - - - - - 5.

PRIX *propoſé pour l'Année* 1781 - - - - 7.

REFLEXIONS *ſur le temps périodique des Comètes en général & principalement ſur celui de la Comète obſervée en* 1770, *par Mr.* A. J. Lexell - - - - - - 12.

OBSERVATIONS *& Expériences ſur les aimans artificiels, principalement ſur la meilleure maniere de les faire, par Mr.* N. Fuſs - 35.

Page

PHYSIQUE EXPERIMENTALE

Obſervations ſur l'Electricité naturelle par le moyen d'un Cerf-volant: addreſſées à l'Académie, par S. E. Mr. le Prince Dimitri de Gallitzin - - - - - - - 76.

MECHANIQUE

Jugement de Meſſieurs les Commiſſaires nommés par l'Académie pour examiner le modele d'un pont de bois à conſtruire ſur la Néva; préſenté à l'Aſſemblée le 3 *Décembre, par Mr.* Nordſtern, *Horloger de l'Académie Impériale des Beaux-Arts* - - - - - 85.

METEOROLOGIE

Eté de 1778 - - - - - - - 89.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS *préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier ſémeſtre de l'Année* 1778. - - - - - - 93.

ACTA

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII. Pars poſterior

cum tabulis XI aeri inciſis.

MATHEMATICA

	Pag.
LEONH. EVLER. *De curvis triangularibus* -	3.
—— —— *De menſura angulorum ſolidorum* - -	31.
ANDR. LEXELL. *Ad Diſſertationem de reductione formularum integralium ad rectificationem ellipſeos & hyperbolae, additamentum* -	55.
LEONH. EVLER. *De caſibus quibusdam maxime memorabilibus in Analyſi indeterminata; vbi imprimis inſignis vſus calculi angulorum in Analyſi Diophantaea oſtenditur* - -	85.
NICOLAVS FVSS. *Gemina methodus inueſtigandi valorem producti* $\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$, *dum ambo integralia a termino* $x = 0$ *vſque ad terminum* $x = 1$ *extenduntur* - -	111.

Pag.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De motu oſcillatorio duorum corporum ex filo ſuper trochleas traducto ſuſpenſorum* - - - - - - 137.

— — *De Problemate quodam mechanico ſatis obvio, at ſolutu difficillimo* - - - 150.

— — *Solutio gemina Problematis, quo motus corporis, filo alicubi alligati, ſuper plano horizontali quaeritur* - - - 162.

W. L. KRAFFT. *Annotationes circa conſtructionem et vſum acus inclinatoriae, et determinatio inclinationis magneticae Petropoli ad finem anni* 1778 - - - - - 170.

PETR. INOCHODZOW. *Novum Hygrometri genus deſcriptum* - - - - 193.

PHYSICA

I. G. GEORGI. *Analyſis chemica agarici fugitivi et boletorum bovini atque igniarii* - - 207.

C. F. WOLFF. *De inconſtantia fabricae corporis humani, de eligendisque ad eam repraeſentandam exemplaribus* - - - - 217.

I. LE-

Pag.

I. LEPECHIN. *Novae pennatulae & ſertulariae ſpecies* - - - - - - 236.

A. I. GÜLDENSTAEDT. *Cyprinus barbus et cyprinus capito* - - - - 239.

—— —— *Appendix obſeruationum ad hiſtoriam reliquorum Cyprinorum cirratorum pertinentium* - - - - - - 253.

I. T. KOELREVTER. *Digitales aliae hybridae* 261.

ASTRONOMICA

LEONH. EVLER. *Noua methodus motum planetarum determinandi* - - - - - 277.

ANDR. LEXELL. *De eclipſi Solis anno* 1778 *die* 24 *Iunii ſt. nou. obſeruata* - - 303.

—— —— *ſupplementum ad diſſertationem de eclipſi Solis anno* 1778 *obſeruata* - - - 332.

Epitome obſeruationum meteorologicarum, Petropoli anno MDCCLXXVIII ſecundum Calendarium Gregorianum inſtitutarum - - - - 345.

Corri-

Corrigenda.

p. p. 137, 138, 139 l. 237, 238, 239.

HISTOIRE.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXVIII.

Juillet —— Décembre.

ASSEMBLÉE PUBLIQUE.

L'Aſſemblée annuelle & publique s'eſt tenue le Samedi 13 Octobre. Elle a été honorée de la préſence de pluſieurs perſonnes de diſtinction, des Miniſtres des Cours étrangeres & des Honoraires: elle a commencé une demie heure avant midi.

Le Secrétaire de Conférences *Jean Albert Euler* en a fait l'ouverture par un expoſé des lectures & publications qui alloient occuper cette Séance ſolemnelle.

Mr. le Profeſſeur *Lexell* lut enſuite des *Recherches ſur le temps périodique des cometes en général & particulierement ſur celui de la comete de l'année* 1770.

Mr. l'Adjoint *Fuſs* le réleva et lut des *Obſervations & expériences ſur les aimans artificiels & ſur les meilleures manieres de les faire.* Tout l'appareil des barres & autres pieces magnétiques, qui avoient fourni l'occaſion de faire ces obſervations, étoit rangé ſur la table & expoſé aux yeux de l'Aſſemblée.

S. E. Mr. *de Domaſchnef*, Directeur préſidant à l'Aſſemblée, publia avec des regrets dus à leurs mérites les noms de Académiciens honoraires & externes morts pendant le cours des deux derniers années. Il proclama enſuite ſix nouveaux membres, que l'Académie pour réparer la perte des premiers, avoit élus dans ſa Séance du 28 Septembre. S. E. Mr. *d'Adadourof*, Conſeiller privé actuel et Sénateur, qui étoit du nombre, fut introduit par le Secrétaire, & après avoir pris place parmi les Honoraires, il adreſſa à l'Académie un diſcours de remerciment en ruſſe, auquel Mr. *de Domaſchnef* répondit dans la même langue.

Le Directeur rendit compte de ce qui regardoit le Prix à diſtribuer, & la novelle Queſtion à propoſer. Le Prix ſur la queſtion d'acouſtique, qui devoit être adjugé cette année, & qui déja avoit été renvoyé une fois, le fut encore pour la ſeconde, ſans cependant fixer de terme pour le concours des Pieces. La nouvelle queſtion que l'Académie propoſa pour l'année 1781 concerne l'Aſtronomie ſpéculative. *Voyez le Programme ſuivant.*

Le Secrétaire termina la Séance en rapportant que le modele d'une échelle de nouvelle conſtruction pour les incendies inventée par le Sr. *Dahlgréen* Maitre forgeron en cette ville, ayant été executé en grand, Meſſieurs les Académiciens nommés pour l'examiner avoient trouvé qu'elle répondoit parfaitement au jugement favorable qui en a été porte (*), que l'Académie par conſéquent voulant encourager le talent de cet Artiſte ingénieux, lui avoit décerné la Médaille académique en argent.

Le Directeur fit entrer le Sr. *Dahlgréen* & lui donna publiquement cette marque de généroſité académique.

MORT.

L'Académie a perdu le plus ancien de ſes Aſſociés libres par la mort de Mr. *François Arouet de Voltaire* arrivée à Paris le 30 Mai n. ſt. Il avoit été reçu au nombre des Membres externes le 24 Décembre 1746.

ASSOCIÉS NOUVEAUX.

proclamés le 13 Octobre dans l'Aſſemblée publique,

HONORAIRES.

S. E. Mr. *Waſile Eudoximovitſch Adadurof*, Conſeiller Privé actuel, Senateur, et Curateur de l'Univerſité

(*) Hiſtoire de 1777. P. I. pag. 67. ſeq.

té Impériale de Moſcou: Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski & de Ste. Anne.

S. E. Mr. le Prince *Dimitri Alexievitſch de Gallitzin*, Chambellan actuel & Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale auprés de Leurs Hautes Puiſſances les États Généraux des Provinces Unies à la Haye.

EXTERNES.

M. *Tronchin* Docteur en Médecine & Médecin du Corps de S. A. Msgr. le Duc d'Orleans, premier Prince du Sang: de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, & de celle des Sciences de Paris, *à Paris.*

Mr. *Pierre Camper*, Profeſſeur en Médecine à Gröningue: de la Société Royale des Sciences de Londres, de l'Académie Royale des Sciences & belles-lettres de Pruſſe, de la Société de Harlem & Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris, *à Gröningen.*

Mr. l'Abbé *Boſſut*, Honoraire-Aſſocié-libre de l'Académie Royale d'Architecture, Examinateur des Eleves du Corps de Génie, Inſpecteur Général des Machines & Ouvrages hydrauliques des Bâtimens du Roi de France: de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle des Sciences & belles-lettres de Pruſſe, de l'Inſtitut de Bologne &c. *à Paris.*

M. *Jean Hyacinthe de Magellan*, Gentil-homme Portugais: de la Société Royale des Sciences de Londres & Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris, *à Londres.*

PRIX.

PRIX.

propoſés par l'Académie Impériale des Sciences pour l'Année 1781.

L'Académie Impériale des Sciences devoit adjuger, dans ſon Aſſemblée du 13 Octobre 1778, le Prix de Phyſique qui concernoit la Queſtion ſuivante:

Expliquer quel eſt le caractere des Sons que produiſent des tubes cilindriques d'un diametre égal, qui étant conſtruits à l'un des bouts comme les flutes à bec, ſont percés le long de leur côté d'une ouverture circulaire: qu'elle eſt la varieté des ces ſons par rapport à la qualité grave & aigue ſelon la différente poſition & grandeur de ce trou lateral?

Quoique ce Prix eut déja été renvoyé une fois, & que l'Académie jusqu'au nouveau terme eut reçu diverſes pieces, aucune d'elles n'a rempli le but principal de la Queſtion, qui ne conſiſte pas ſeulement à occaſionner des expériences nouvelles mais à les appliquer aux formules que donne la Theorie. Cependant l'importance du ſujet ayant paru à l'Academie aſſés grande pour ne pas l'abandonner entierement, elle redouble ſon invitation à tous les Phyſiciens pour travailler ſur cette queſtion & pour tâcher de la reſoudre au moins en partie: & afin qu'ils ne puiſſent point ſe plaindre d'un delai trop court ni de la gêne en général que cauſe chaque terme limité, elle remet ce Prix pour la ſeconde fois ſans preſcrire de

terme

terme pour le concours des Pieces, s'engageant à donner la ſomme ſtipulée de cent Ducats d'hollande au premier bon mémoire qui lui ſera addreſſé ſur cette queſtion, dans quelque temps qu'il lui parvienne.

Comme toutes les meſures du temps ſe rapportent finalement au mouvement diurne de la Terre, qu'on a regardé de tout temps comme uniforme et inaltérable, par la réſiſtance de l'Atmoſphere ou de l'éther, par les forces du Soleil & de la Lune ſur le ſphéroïde applati, par la marée qui change la figure de ce ſphéroïde, & conſéquemment auſſi ſes axes principaux, ou enfin par d'autres forces quelconques, entant que leur moyenne direction ne paſſe pas par le centre de gravité de notre Globe, ſans que perſonne n'ait jusqu'ici démontré que cette ſuppoſition ſoit conforme à la vérité:

On demande,

Si l'on peut produire des preuves convainquantes de cette égalité de rotation de la Terre?

Ou bien, au cas que ce mouvement diurne ne ſoit pas uniforme & qu'il ait ſouffert réellement quelques légeres altérations par la réſiſtance de l'air & de l'éther, ou par quelque autre force qui puiſſe agir ſur la Terre;

On

On demande encore,

1°. *Par quels phénomenes on peut connoitre les altérations produites dans le mouvement diurne?*

2°. *Par quels moyens on peut rectifier la meſure du temps, afin d'en tirer une comparaiſon exacte entre la meſure du temps des Siecles paſſés et celle de nos jours?*

Le prix qui eſt une Médaille d'or du poids de cent ducats ſera donné à celui qui, au jugement de l'Académie, aura le mieux réuſſi.

On invite les Savans de tout pais, excepté les Membres ordinaires de l'Academie, à travailler ſur cette queſtion, & à envoyer leurs recherches avant le 1 Janvier de cette année 1781, à Mr. *Jean Albert Euler* Secrétaire des Conferences de l'Academie Imperiale des Sciences. Celles qui arriveront après ce terme ne ſeront point admiſes au concours. D'ailleurs les Auteurs ſont pries d'avoir ſoin que leurs mémoires ſoient écrits diſtinctement en langue ou ruſſe, ou latine, ou allemande, ou françoiſe. Ils eviteront auſſi que leurs noms ne paroiſſent point dans les Diſſertations qu'ils enverront; mais chacun d'eux y mettra une ſentence, & en la conſignant au Secretaire il recevra de lui un récepiſſé où ſera marqué le numero de la depoſition de ſa piece, pourvu qu'il ait indique le lieu où le billet lui doit etre adreſſe. Chaque Auteur joindra en meme temps à ſa piece un billet cacheté, qui contiendra ſon nom & ſon adreſſe, & qui ne ſera point ouvert à moins que la Diſſertation y jointe n'ait

 remporté

remporté le Prix: & dans ce cas la médaille ſera délivrée, ou l'argent payé du tréſor de l'Académie à l'Auteur, lorsqu'il aura renvoyé la reconnoiſſance qu'il aura reçue du Secrétaire. Le jugement de l'Académie ſera declaré dans l'Aſſemblée publique & annuelle de 1781.

L'Académie attend encore des réponſes aux queſtions ſuivantes, annoncées dans les Programmes précedens.

Pour l'Année 1779.

Indiquer les meilleurs moyens, prouvés par la Théorie & par des Expériences ſuffiſantes, de rendre durables le bois de Chéne & les autres bois de conſtruction pour les navires, ſoit par la culture, ſoit à l'aide de certains mordans d'un bas prix, qui en pénétrant ces bois ſans nuire à leur ſolidité, empêchent la corruption des navires dans les ports, où l'eau douce ſe mêle à l'eau de mer.

Pour l'Année 1780.

Quelle eſt la nature & le caractère des ſons voyelles ſi eſſentiellement différens entr'eux?

Et comme les facteurs d'Orgues ont taché depuis longtemps d'imiter dans les jeux de l'Orgue, quoiqu'avec un ſuccès fort douteux, la voix humaine, en employant certains tuyaux qui prononcent presque généralement la voyelle compoſée *ai*, l'Académie demande en ſecond lieu:

Si

Si l'on ne pourroit pas conſtruire des inſtrumens ſemblables aux tuyaux de ce jeu d'Anche connu ſous le nom de voix humaine, qui imitaſſent parfaitement les différentes voyelles a, e, i, o, u, *moyennant quelques changemens apportes à la figure du tuyau, du noyau, de l'echalotte, ou de quelque autre partie eſſentielle, qui influe ſur le genre & la qualité du ſon, & donne au jeu mentionné cette harmonie ſi agréable & ſi différente de celle des autres jeux?*

Chaque Prix eſt de cent ducats ou d'une médaille d'or du même poids, & les Pieces ſeront reçues au concours jusqu'au 1 Janvier de la dite année.

RÉFLEXIONS
Sur le temps périodique des Comètes en général, & principalement ſur celui de la Comète obſervée en 1770.

Par Mr. A. J. Lexell.

Lues dans l'Aſſemblée publique le 13 Octobre 1778.

Depuis que les Aſtronomes ont commencé à calculer les orbites des Comètes, d'après les vraies loix du mouvement des corps celeſtes, on a pourtant très peu d'exemples, qu'ils ayent pouſſé ces calculs jusqu'à la recherche du temps que les Comètes employent à faire leurs révolutions autour du Soleil; au moins on n'a pas encore réuſſi à déterminer, au moyen du calcul, le vrai temps périodique d'aucun de ces Aſtres, avec une exactitude tant ſoit peu préciſe; ſi ce n'eſt que Monſieur *de la Lande* prétend avoir vérifié le temps de la révolution pour la fameuſe Comète de *Halley*, à trois ans près, en employant dans ſon calcul des obſervations de cette Comète, faites lors de ſa derniere apparition en 1759. Lors donc que par mes recherches ſur la Comète de l'An 1770, je croyois être venu à bout d'en fixer le temps de la révolution, la nou-

nouvelle de cette découverte devoit ſans doute paroitre bien ſinguliere aux Aſtronomes; mais ce qui devoit leur cauſer la plus grande ſurpriſe, c'etoit l'extrême brieveté du Période trouvé pour cette Comète, qui ſurpaſſoit à peine cinq ans & demi, en ſorte que la Comète ſuivant cette determination feroit ſes revolutions autour du Soleil, encore en moins de temps, que deux Planétes, ſavoir Jupiter & Saturne. Auſſi n'a-t-on pas manqué par tout où la nouvelle de mes recherches s'eſt répandue, de regarder cette concluſion comme très hazardee & même incroyable. Le réſultat de mes calculs ayant donc l'apparence d'une ſingularite très marquée, j'ai cru qu'il étoit de mon devoir de ne me pas trop hâter, en préſentant au Public le precis de mes réflexions, ſur un ſujet ſi nouveau & ſi extraordinaire: & j'eſpere qu'on ſera d'autant plus content de ce retard, qu'avant de vouloir perſuader aux autres, que les concluſions trouvées par mes calculs fuſſent juſtes & raiſonables, je me ſuis donne toute la peine poſſible pour m'en convaincre moi-même, en les ſoumettant à l'examen le plus rigoureux. Ayant donc achevé cet examen, qui m'a fourni, j'oſe le dire, une conviction auſſi ſûre, que celle qu'on a raiſon d'attendre d'une demonſtration Géometrique, il me ſera à preſent permis de rendre compte devant cette *Illuſtre Aſſemblée*, des recherches par les quelles j'ai tâché de determiner le temps de la révolution pour cette remarquable Comète de 1770. Mais avant que d'entrer en matiere, il ne ſera pas tout à fait hors de propos, de preſenter quelques réflexions ſur les conditions qui doivent avoir lieu, pour qu'il devienne poſſible de déterminer la révolution de quelque Comète que ce ſoit au moyen du calcul.

Les Aſtronomes en calculant le mouvement des Comètes ſont accoutumés à ſuppoſer dans leurs calculs, que les Comètes décrivent des orbites Paraboliques; non qu'ils ſoient perſuadés que ce mouvement ſe faſſe en effet dans de telles lignes, mais pour faciliter leur travail, qui devient aſſés long & compliqué, lorsque dans ces recherches on ſe croit obligé de tenir compte de l'excentricité des orbites Elliptiques; & même quand il ne s'agit que de connoitre à peu près le mouvement de quelque Comète, cette ſuppoſition eſt dans les cas les plus fréquens très admiſſible, vû que des lignes Paraboliques ſe confondent ſenſiblement avec de petites portions d'Ellipſes très allongées. Il paroit néanmoins très vraiſemblable que toutes les Comètes ſans exception ont certains Périodes de révolution, quoiqu'à cauſe de la grande excentricité de leurs orbites, auſſi bien que du peu de temps qu'il eſt permis de les obſerver, il devient le plus ſouvent presque impoſſible de fixer la durée de ces Périodes par des obſervations faites pendant une ſeule apparition. Il eſt aiſé de concevoir, que pour le plus grand nombre des Comètes, le temps périodique doit être extrèmement grand, & ainſi d'autant plus difficile à déterminer par le calcul; puisque parmi un nombre aſſés conſidérable de Comètes obſervées jusqu'ici, il n'y en a que trois, qui paroiſſent avoir eu des retours périodiques. Car outre la fameuſe Comète de 1682, dont le célebre *Halley* prédit le retour vers l'an 1759, prédiction dont l'evenement a très bien vérifié la juſteſſe, on a ſeulement deux autres Comètes, qui vraiſemblablement paroiſſent avoir un retour régulier; ce ſont celles de 1532 & 1264, dont la premiere a reparu l'An 1661 & qu'on a raiſon d'attendre

dre de nouveau l'An 1789; mais la ſeconde a eu ſon retour l'An 1556 & deviendra peut être viſible l'An 1848.

Quelques défectueuſes que les Méthodes dont on fait uſage pour calculer le mouvement des Comètes puiſſent etre, il eſt très ſûr que ce n'eſt pas à cette imperfection de l'Analyſe, qu'on doit attribuer la difficulté qui ſe préſente, lorsqu'il s'agit de déterminer le temps du retour des Comètes; mais qu'elle dépend principalement de la figure de leurs orbites, qui eſt celle d'une Ellipſe très allongée. Pour s'en former une idée bien préciſe, il eſt bon de ſe rappeller, quels ſont les caractères diſtinctifs, par lesquels on eſt en état de répréſenter le vrai mouvement d'une Planète ou d'une Comète, en ſorte qu'on puiſſe la reconnoitre parmi tous les autres corps céleſtes, qui appartiennent à notre Syſtème Planétaire. Entre ces élémens, deux ſervent à déterminer la ſituation du plan, dans le quel l'aſtre ſe meut: ce ſont, la poſition de la ligne ſelon laquelle ce plan coupe celui de l'Ecliptique & l'angle que ces deux plans font entr'eux, ou ce qu'on nomme en Aſtronomie la longitude du noeud & l'inclinaiſon de l'orbite. Les autres elemens ſont rélatifs à l'orbite même parcourue dans le plan dont la ſituation eſt ſuppoſée établie, & ſe reduiſent aux points ſuivans. 1°. Le lieu de l'aſtre dans ſa plus proche diſtance du Soleil, qui eſt déterminé, tant par cette diſtance elle-même, que par l'angle que cette ligne fait avec la ligne du noeud. 2°. Le temps lorsque l'aſtre eſt le plus près du Soleil & enfin 3°. l'excentricité de l'orbite elliptique, que l'aſtre décrit autour du Soleil.

En

En faiſant tant ſoit peu attention à ces élémens, il devient aiſé de concevoir, que les Aſtronomes s'étant occupés de la recherche du mouvement des Planètes, ont trouvé pluſieurs moyens pour faciliter ce travail, dont il n'eſt pas permis de faire uſage, lorſqu'il s'agit du mouvement des Comètes. Les Planètes décrivant dans leur mouvement des orbites presque circulaires ou très peu excentriques, ne s'éloignent jamais aſſés de la terre, pour qu'il ne ſoit pas poſſible de les obſerver dans tous les points de leurs trajectoires, & par cette raiſon il a été permis de faire ſur les Planètes des obſervations ſi variées, qu'on a réuſſi à déterminer chacun des élémens de leurs orbites, indépendamment de tous les autres. C'eſt donc auſſi immédiatement par les obſervations, qu'on a pu déterminer la durée de la révolution des Planètes, en remarquant combien de temps elles employoient à retourner vers les mêmes étoiles fixes, par rapport à un ſpectateur qu'on ſuppoſe placé dans le Soleil. Or ce moyen de fixer le temps de la révolution ne peut pas être employé lorſqu'il eſt queſtion du mouvement des Comètes, à cauſe de la longue durée de leur Période, qui certainement pour la plus grande partie de ces aſtres, ſurpaſſe des ſiecles entiers: & en effet de toutes les Comètes, dont le mouvement eſt conſtaté par des obſervations Aſtronomiques, il n'y en a que trois, comme je viens de le remarquer, dont le retour a été obſervé. A cauſe de la grande excentricité des trajectoires des Comètes, auſſi bien que de la foibleſſe de leur lumiere, ces aſtres ne deviennent viſibles, que lorſqu'ils approchent de leur Périhelie, & par cette raiſon, les portions des trajectoires, qu'ils décrivent pendant leur apparition, ne ſont que très petites. En

s'oc-

s'occupant donc de la détermination des élémens d'une Comète, au moyen des obſervations faites pendant le temps qu'elle eſt approchée de ſon *Péribélie*, on eſt obligé de chercher tous ces élémens à la fois, & par conſequent la détermination du temps périodique devient à l'ordinaire ſi compliquée qu'elle ne ſçauroit mener à des réſultats tant ſoit peu exacts. Au reſte plus l'excentricité des orbites elliptiques eſt conſidérable, plus il devient difficile d'en trouver la valeur exactement, d'où il ſuit que la détermination du temps periodique pour des corps qui ſe meuvent dans de telles orbites, ſera d'autant plus incertaine. Enfin comme l'exactitude de cette détermination depend de la bonté des obſervations, par lesquelles on a établi les lieux de la Comète vus de la terre; même à cet égard, on n'a pas raiſon de s'attendre à la plus grande préciſion, vû que les Comètes ont ordinairement trop peu de lumiere & ſont trop mal terminées, pour qu'on puiſſe eſtimer leur poſition, par rapport à des étoiles fixes, avec la plus grande juſteſſe: Cependant quelque difficile que ſoit la recherche du temps periodique des Comètes, il ne faut pas deſeſpérer de la reuſſite dans tous les cas, au moins il vaut bien la peine d'examiner dans quelles circonſtances une Comète doit ſe trouver, afin qu'on puiſſe former quelque preſomption vraiſemblable ſur le temps de ſon retour. En général il eſt evident, que l'apparence de trouver ce temps périodique eſt d'autant plus grande, que la portion de l'orbite parcourue par la Comète, pendant le temps de ſon apparition, a été conſidérable. Or pour juger lesquelles des Comètes parcourent, lors de leur apparition, des portions très grandes de leurs trajectoires, il faut principalement faire attention aux valeurs de leurs

 diſtan-

diſtances Périhélies du Soleil. Par rapport à cette circonſtance, il ſera donc permis de partager toutes les Comètes en trois claſſes, dont la premiere contient celles, qui ont la diſtance Périhélie conſidérablement plus grande que la diſtance du Soleil à la Terre; dans la ſeconde ſeront compriſes celles, dont la diſtance Périhélie n'eſt ni beaucoup plus grande que le demi-axe de l'Ecliptique, ni plus petite que la troiſieme ou quatrieme partie de ce demi-axe. Enfin la troiſieme claſſe contiendra les Comètes, qui ont la diſtance Périhélie encore plus petite que cette troiſieme ou quatrieme partie de la diſtance du Soleil à la Terre. Parmi toutes les Comètes obſervées, il n'y en a que deux, ſavoir celles de 1729 & 1747, qui appartiennent à la premiere claſſe. Toutes deux ont été obſervées pluſieurs mois de ſuite, mais les portions des orbites parcourues autour du Soleil, pendant leur apparition, étoient néanmoins trop petites, pour en tirer quelque éclairciſſement ſur la durée de leur révolution & il eſt même très probable, que toutes les Comètes de cette claſſe, qui pourroient paroitre à l'avenir, ſe trouveront dans le même cas. La troiſieme claſſe des Comètes eſt auſſi fort peu nombreuſe. Les plus remarquables de celles qui doivent être rangées dans cette claſſification, ſont les Comètes de 1680, 1744 & 1769, qui ſe ſont diſtinguées par l'éclat de leur lumiere & par la longueur de leurs queues. Comme elles approchoient très près du Soleil, elles ont décrit, pendant leur apparition, des angles aſſés conſidérables autour de cet Aſtre; mais à cauſe de l'excentricité de leurs orbites, qui doit être extrêmement grande, il n'eſt pas probable, qu'on puiſſe prononcer quelque choſe ſur le temps de leurs Périodes. En ſuppoſant, par

par exemple, que la Comète de l'An 1680 ait ſeulement un temps périodique de cent ans, ſon excentricité devroit ſurpaſſer ſa diſtance Périhélie presque quatre mille fois, d'où il eſt ſûr que la moindre erreur commiſe dans la détermination de l'excentricité, produiroit des changemens très conſidérables par rapport au temps périodique. Ce ne ſont donc que les Comètes de la ſeconde claſſe, desquelles on peut ſe flatter de fixer le retour, en cas qu'elles ayent décrit des portions conſidérables de leurs orbites durant le temps de leur apparition. Cependant quelque nombreuſe que ſoit cette claſſe, on ne trouve entre les Comètes qui y ſont compriſes, qu'un très petit nombre de celles qui ont été obſervées aſſés long tems, & même de ce nombre, il faudra donner l'excluſion à toutes celles dont les obſervations pourroient être douteuſes. En examinant donc les Comètes de cette claſſe qui ont été obſervées depuis le commencement de ce Siecle, on n'en trouve que quatre, dont le temps de l'apparition ait été un peu conſidérable, ce ſont celles qui ont paru en 1739, 1759, 1770 & 1773. Entre celles-ci la Comète de 1759 eſt très certainement la même, qui avoit paru en 1456, 1531, 1607, & 1682: ſon temps de révolution étant donc très bien conſtaté, il n'étoit pas néceſſaire d'entreprendre la recherche de ce Période par les obſervations de la derniere apparition. On a pourtant bien de l'obligation à Monſieur *de la Lande* de s'être occupé d'une telle recherche, puisque cet exemple devoit encourager les Aſtronomes à en entreprendre de ſemblables par rapport à d'autres Comètes.

La Comète de 1770 étoit certainement une des plus ſingulieres de celles qu'on a obſervées, & meritoit à plus d'un égard l'attention des Aſtronomes; mais ce qui la rendoit principalement remarquable, c'étoit que les obſervations faites ſur ſon mouvement, ne pouvoient cadrer avec l'hypothèſe d'une orbite Parabolique. Monſieur *Meſſier* célèbre Aſtronome de Paris & Membre de cette Illuſtre Société, dont l'aſſiduité & le zèle infatigable pour l'Aſtronomie méritent les plus grands éloges, ayant depuis une vingtaine d'années enrichi le Syſtème Planétaire de la découverte de pluſieurs Comètes, eſt auſſi celui qui découvrit la Comète de 1770 & qui en a fait une très belle ſuite d'obſervations, on ne peut pas plus exactes. Elle fut obſervée par lui à deux differentes repriſes. Pour la premiere fois Monſieur *Meſſier* la remarqua le 14 de Juin, dans la conſtellation du Sagittaire; ſon mouvement apperçu de la terre, étoit au commencement aſſés lent, mais il s'accéléra enſuite, & devint vers la fin du mois de Juin d'une rapidité étonnante, ce qui donnoit une preuve très ſûre, que la Comète s'approchoit alors très près de la terre. Le 3 de Juillet, Monſieur *Meſſier* la perdit de vue, parcequ'elle venoit alors de ſe plonger dans les rayons du Soleil. Enſuite après s'être dégagée des rayons du Soleil, elle commença a être viſible pour la ſeconde fois le 2 d'Août, & après ce temps Monſieur *Meſſier* continua de l'obſerver jusqu'au 2 d'Octobre. Il eſt prouvé par le calcul, que l'angle décrit par la Comète autour du Soleil, pendant ſa premiere apparition, eſt environ de 12°, & pendant la ſeconde apparition de 107°; de même que l'angle d'Anomalie, entre le lieu de la Comète le 14 de Juin & celui du 2 d'Octobre, ſe trouve un peu plus grand que 172°;

172°; on a donc la plus grande raiſon de préſumer, que la recherche du temps périodique ne ſera pas pour cette Comète tout à fait infructueuſe.

Monſieur *Pingré* ayant fait uſage des obſervations de Monſieur *Meſſier* faites dans le mois de Juin, pour calculer le mouvement de la Comète dans une orbite Parabolique, trouva pour cette orbite des élémens, qui ſatisfaiſoient aſſes bien aux obſervations faites depuis le 14 jusqu'au 29 de Juin, mais qui ne pouvoient, en aucune façon, etre miſes d'accord avec les obſervations faites pendant la ſeconde apparition. Or comme on avoit quelque raiſon de ſoupçonner, que la Comète en s'approchant de la terre, les derniers jours du mois de Juin, auroit pû ſübir quelque derangement dans ſon orbite, par l'action de notre Globe; il reſtoit encore à examiner, ſi l'on ne viendroit pas à bout de ſatisfaire au moins à toutes les obſervations de la ſeconde apparition, par une orbite Parabolique. Pour cet effet Monſieur *Proſperin* célebre Aſtronome d'Upſal, entreprit de calculer le mouvement de la Comète, d'après les obſervations de la ſeconde apparition; mais le reſultat de ſes calculs montra, que ces obſervations ne pouvoient étre miſes d'accord entre elles, tant qu'on ſuppoſe, que le mouvement de la Comète s'eſt fait dans une orbite Parabolique: car ayant cherché une ligne Parabolique, qui ſatisfit aux obſervations faites depuis le 2 jusqu'au 19 d'Août, Monſieur *Proſperin* trouva qu'elle differoit beaucoup des obſervations faites depuis la fin d'Août jusqu'au commencement d'Octobre; & au contraire l'orbite Parabolique, qui étoit d'accord avec ces dernieres obſervations, s'eloignoit d'autant

tant plus des premieres. Le réſultat des calculs de Monſieur *Proſperin* ayant excité ma curioſité, je me ſuis propoſé d'entreprendre le calcul du mouvement de la Comète, dans l'hypothèſe d'une orbite Elliptique; mais avant que de commencer cette recherche, j'ai voulu eſſayer moi même, s'il ne ſeroit pas poſſible de trouver une orbite Parabolique, qui ſatisfit à toutes les obſervations; or les premiers eſſais entrepris à ce deſſein, m'en ayant donné une conviction ſuffiſante, je pouvois ſans aucun ſcrupule fixer mes recherches au calcul de l'orbite Elliptique. Or comme l'exactitude d'un tel calcul dépend principalement de la grandeur de l'angle que la Comète décrit autour du Soleil, pendant le temps écoulé entre les obſervations employées dans le calcul; j'ai commencé par faire uſage de trois obſervations dont deux étoient de part & d'autre autant éloignées du Périhélie de la Comète, qu'il étoit permis de les trouver, & dont la troiſieme étant au milieu des deux autres, approchoit très près du Périhélie. Ayant fait dix combinaiſons, de trois à trois ſemblables obſervations, je trouvai des réſultats pour les élémens de la Comète dont l'accord ſurpaſſoit toute mon attente & particulierement par rapport au temps périodique: la plus grande différence des différentes valeurs ne ſurpaſſoit pas de beaucoup une demie année, la moyenne valeur étant cinq ans & demi. Cette concluſion m'ayant paru très ſinguliere & même incroyable, j'ai cru qu'il valoit la peine de l'examiner encore plus ſcrupuleuſement, en eſſayant ſi, au moyen des ſeules obſervations faites pendant la ſeconde apparition, cette valeur du temps périodique ſe trouveroit confirmée; la premiere recherche étant aſſujettie à quelque doute, en cas que l'action de la terre eût

eût été capable de produire quelque changement dans le mouvement de la Comète. Ayant donc fait dix nouvelles combinaiſons de trois obſervations de la ſeconde apparition, j'ai été bien ſurpris de voir, que la moyenne valeur pour le temps périodique trouvée par ces calculs, s'accordoit encore à fort peu près, avec celle que les prémiers calculs avoit fournie. Malgré cet accord ſingulier de tant de différentes recherches, ne me croyant pas encore aſſes convaincu de l'exactitude par rapport à cette valeur du Période de la Comète, j'ai taché de la vérifier de pluſieurs manieres, dont le détail deviendroit à préſent trop long & trop ennuyant; il ſuffira donc de préſenter une esquiſſe des élémens de cette remarquable Comète, tels qu'ils m'ont parus le mieux s'accorder avec les obſervations.

I. La longitude du Nœud aſcendant de la Comète, où elle commence à s'élever au deſſus de l'Ecliptique, paſſe par $4^{s}.\ 12^{\circ}$, c'eſt à dire par le douzieme degré dans le ſigne du Lion.

II. L'inclinaiſon de l'orbite de la Comète avec le plan de l'Ecliptique, n'eſt que de $1^{d.}\ 33'\ 40''$, & par conſéquent moindre que l'inclinaiſon des orbites de toutes les Planètes, excepté celle de Jupiter; & même entre toutes les Comètes obſervées jusqu'ici, celle-ci a l'inclinaiſon de l'orbite la plus petite.

III. L'angle, qui marque l'élongation du Nœud deſcendant de l'axe de l'orbite, eſt de 44°, $17'$, conſéquemment

ment le lieu du Périhélie de la Comète ſe trouvera dans $11^s. 26^o. 17'$, c'eſt à dire dans le ſigne des Poiſſons au 26e degré.

IV. Le temps, lorsque la Comète a paſſé par ſon Périhélie, ou lorſqu'elle a été dans ſa plus proche diſtance du Soleil, eſt arrivé l'An 1770, le 13 d'Août à $13^h. 5'$ à peu près. Il eſt en effet bien ſurprenant, que ce paſſage par le Périhélie ſe ſoit fait préciſement dans ce temps, pour que la Comète ait du s'approcher le 1 de Juillet, ſi près de la terre, qu'elle n'en étoit éloignée que de la 70me partie de la diſtance moyenne du Soleil à la Terre, c'eſt à dire preſque ſi près qu'il eſt poſſible qu'elle puiſſe jamais s'approcher de l'orbite de la terre.

V. La diſtance Périhélie de la Comète, ou ſon plus petit éloignement du Soleil eſt égal à 0, 6743815, ou un peu plus grand que $\frac{2}{3}$ de la diſtance moyenne du Soleil à la Terre: ainſi cette Comète étant dans ſon Périhélie, paſſe plus près du Soleil, que toutes les Planètes, Mercure excepté.

VI. Le demi-axe de l'Ellipſe décrite par cette Comète eſt égal à 3, 1478606, ou un peu plus grand que le triple du demi-axe de l'Ecliptique, & la diſtance Aphélie de la Comète ſe trouve 5, 6213391, ou à peu près $5\frac{1}{2}$ fois plus grande que la diſtance du Soleil à la terre; de ſorte que Jupiter & cette Comète ſont dans leurs Aphélies preſque également éloignés du Soleil; d'où il s'enſuit, que l'orbite de cette Comète traverſera les orbites

orbites de Jupiter, de Mars, de Vénus & celle de la Terre, mais qu'elle eſt toujours plus proche du Soleil que l'orbite de Saturne, & plus éloignée que celle de Mercure.

VII. Enfin la concluſion la plus inopinée & en même temps la plus intéreſſante, par rapport au mouvement de cette Comète, c'eſt que ſon temps de révolution eſt environ de cinq ans & ſept mois; d'où il ſuit, qu'elle a du retourner à ſon Périhélie l'An 1776 & qu'on a raiſon de l'attendre encore dans le Périhélie, l'An 1781 dans le mois d'Octobre, ſi d'autres circonſtances ne font pas changer le mouvement de la Comète avant cette époque. Quelque ſinguliere que cette concluſion puiſſe paroitre, il me ſemble que l'argument le plus fort pour ſon exactitude, c'eſt que les élémens que je viens de rapporter, ſatisfont ſi bien aux obſervations, que pour la plùpart, les erreurs tant en Longitude, qu'en Latitude ne ſurpaſſent pas une minute, & qu'il n'y a qu'une ſeule obſervation, pour laquelle cette erreur va au delà de deux minutes, cette obſervation étant au reſte très douteuſe. On a donc la plus grande raiſon de préſumer, qu'une orbite par laquelle les obſervations ſe trouvent ſi exactement remplies, doit étre la vraie, & qu'en augmentant le temps périodique, on ne ſçauroit ſe flatter, de ſatisfaire également bien aux obſervations. Pour en être parfaitement aſſuré, j'ai ſuppoſé que le temps périodique de la Comète fût un peu plus grand, que celui dont je viens de parler, & alors en tâchant de ſatisfaire aux obſervations du 15 & 29 de Juin, j'ai examiné,

quelles erreurs devroient en réſulter pour les obſervations du 2 & 29 d'Août, auſſi bien que pour celle du 1 d'Octobre. Ayant donc ſuppoſé premierement que le temps periodique fût de 6 ans & poſant la diſtance Périhélie = 0, 6719267, j'ai trouvé qu'en ſatisfaiſant aux obſervations du 15 & 29 de Juin, celles du 2 d'Août & du 1 d'Octobre étoient auſſi remplies; mais que pour l'obſervation du 29 d'Août l'erreur en Longitude montoit jusqu'à cinq minutes: & même j'ai remarqué, que ſi au moyen de quelque changement dans la diſtance Périhélie, on vouloit diminuer l'erreur de l'obſervation du 29 d'Août, celle qui en réſulteroit pour l'obſervation du 1 d'Octobre, en deviendroit d'autant plus conſidérable. Enſuite ayant ſuppoſé le temps périodique de 7 ans & la diſtance Périhélie = 0, 6670785, j'ai trouvé, qu'en ſatisfaiſant aux obſervations du 15 & 29 de Juin, il devoit y avoir pour l'obſervation du 2 d'Août une correction de 3 minutes en Longitude à ajouter, pour celle du 29 d'Août auſſi une correction de 16 minutes additive, & enfin pour l'obſervation du 1 d'Octobre, la correction étoit de 3 minutes à ſouſtraire; d'où j'ai dû conclure que ſi l'on changeoit la diſtance Périhélie, enſorte que l'obſervation du 2 d'Août s'accordat avec le calcul, celle du 1 d'Octobre en deviendroit d'autánt plus fautive. Par ce raiſonement, il eſt, ce me ſemble, exactement démontré, que plus on s'éloigne du temps périodique employé ci-deſſus, plus grandes deviendront les erreurs qu'il faudra admettre dans les obſervations: & ſi l'on aime à croire, que les erreurs qui réſultent, en ſuppoſant le temps périodique de 6 ans, ſoient aſſés vraiſemblables, il eſt au moins certain que le temps périodique ne ſçauroit être augmenté jusqu'à ſept ans,

ans, ſans qu'on ſoit obligé de ſuppoſer dans les obſervations des fautes, qui choqueroient toute vraiſemblance. Au reſte parceque dans ce raiſonnement, il s'agiſſoit de rendre les obſervations faites dans le mois de Juin, d'accord avec celles qui ont été faites pendant la ſeconde apparition, dans le cas où quelqu'un ſe perſuaderoit que l'orbite de la Comète ait été changée par l'action de la terre; je me ſuis encore donné la peine d'examiner, ſi l'on ne trouveroit pas moyen de ſatisfaire exactement à toutes les obſervations de la ſeconde apparition, en augmentant le temps périodique de la Comète. Suppoſant donc le temps périodique de ſept ans, j'ai trouvé, que lorsqu'on ſatisfait aux obſervations du 2 & 29 d'Août & du 1 d'Octobre, l'obſervation faite le 12 d'Août devient fautive de 7 minutes; & même j'ai été convaincu par quelques calculs, que ſatisfaiſant aux deux obſervations du 2 d'Août & du 1 d'Octobre, il n'eſt pas poſſible de remplir l'obſervation du 12 d'Août, qu'à 7 Minutes près, quelque erreur qu'on veuille admettre dans l'obſervation du 29 d'Août. Enſuite en employant le même temps périodique, les élémens qui ſatisfont aux obſervations du 12 & 29 d'Août & du 1 d'Octobre, produiſent une erreur de 13 Minutes pour l'obſervation du 2 d'Août & enfin tâchant de ſatisfaire aux obſervations du 2, 12 & 29 d'Août, on trouve pour l'obſervation du 1 d'Octobre une erreur de 36 Minutes. Il eſt donc évidemment prouvé, qu'il n'y a pas moyen de ſatisfaire aux obſervations de la ſeconde apparition, en ſuppoſant le temps périodide ſept ans & qu'il faut au moins admettre dans quelques unes de ces obſervations, des erreurs de ſept minutes, ce qui paroit aſſés incroyable. Il auroit été ſu-

perflu de pourſuivre cette recherche plus loin, puiſqu'on conçoit très aiſément qu'en augmentant encore plus le temps périodique, en le ſuppoſant, par exemple, de huit ans, les erreurs des obſervations devroient devenir d'autant plus conſidérables. Quelque peu vraiſemblable que notre détermination du temps périodique puiſſe paroitre au premier abrod, vû qu'il n'eſt pas concevable, qu'un Aſtre dont le retour ſe fait tous les cinq ans & demi, ait échappé tant de fois à l'attention des Aſtronomes; il eſt cependant très ſûr par le raiſonnement que je viens de propoſer, que toutes les obſervations faites ſur cette Comète en 1770, s'accordent à prouver, que le temps employé par cet Aſtre à faire ſa révolution, ne ſauroit beaucoup ſurpaſſer la valeur que nous lui avons aſſignée. Quoique je ne m'engage pas à réſoudre parfaitement le doute propoſé contre le temps périodique trouvé, il me ſera permis de préſenter quelques réflexions, qui ſerviront à expliquer comment il a pu arriver que cette Cométe n'ait jamais été obſervée qu'en 1770. Lorsque Monſieur Meſſier ceſſa de voir cette Comète au commencement du mois d'Octobre, ſa diſtance tant du Soleil, que de la terre, égaloit à peu près la diſtance du Soleil à la terre, ce qui fait connoitre que la Comère n'eſt douée que d'une lumiere très foible, en ſorte que ſi le paſſage par le Périhélie arrive dans un temps, où la diſtance entre la Comète & la terre ſurpaſſe celle du Soleil à la terre, il peut bien ſe faire que cet Aſtre échappe alors tout à fait à notre vue. En partant donc de ce principe, que la Comète, pour être vue, ne doit pas être plus éloignée de notre Globe, que le Soleil, on trouve par le calcul, que ſi le temps du Périhélie arrive

dans

dans les ſix derniers mois de l'Année, on a lieu d'eſperer que la Comète ſera viſible; mais au contraire ſi ce temps de Périhélie tombe dans les ſix premiers mois de l'Année, il peut être très douteux que l'on s'en apperçoive. Si le temps du Périhélie étoit donc arrivé pluſieurs fois de ſuite, dans les ſix premiers mois de l'Année; il eſt très aiſé à concevoir, que la Comète a du dans de tels cas, échapper à l'attention des Aſtronomes: Et même lorque le paſſage par le Périhélie ſe fait dans les ſix derniers mois de l'Année, il ne peut arriver, que très rarement, que la Comète ſe préſente dans des circonſtances auſſi favorables, pour être obſervée, qu'elle l'étoit lors de ſon apparition en 1770; car par un évenement très ſingulier, elle paſſoit alors le 13 d'Août par ſon Périhélie, enſorte qu'elle devoit néceſſairement s'approcher presque ſi près de la terre, qu'elle n'en peut jamais devenir plus voiſine. Or ſi la Comète avoit paſſé par le Périhélie ſeulement huit jours plus tôt, ou plus tard, elle auroit été dans ſa plus proche diſtance de la terre, au moins deux fois plus éloignée, qu'elle ne l'etoit en 1770.

Enfin puisque, comme je l'ai déja remarqué, notre Comète dans ſon Aphélie eſt presque également éloignée du Soleil, que Jupiter lorsqu'il paſſe par ſon Aphélie & que même la Longitude des deux Aphélies ne diffère que de 14 degrés, on a quelque raiſon de ſoupçonner, que le mouvement de la Comète a bien pû ſouffrir quelque changement à cauſe de l'action de Jupiter, s'il eſt jamais arrivé, que Jupiter ſe ſoit approché très près de la Comète, lorsque ces deux Aſtres étoint en conjonction dans le voiſinage de leurs Aphélies. On trouve en effet que

la Comète ayant paſſé par ſon Aphélie l'An 1767 le 28 d'Octobre, elle a dû être en conjonction avec Jupiter le 27 de May de la même année, leur Longitude commune étant alors $5^s. 20°. 57'$; à peu près. Or comme la Longitude de l'interſection des orbites de Jupiter & de la Comète, eſt $6^s. 9°. 39'$ & que l'inclinaiſon entre ces deux orbites n'eſt que $51'. 15''$, il en réſulte que la diſtance de Jupiter à la Comète, au temps de leur conjonction, égaloit à peu près la dixieme partie de la diſtance moyenne du Soleil à la Terre, & la 58me. partie de la diſtance entre la Comète & le Soleil; la quantité de matiere du Soleil ſurpaſſant donc celle de Jupiter environ mille fois, l'action de Jupiter ſur la Comète, lorſque ces Aſtres étoient en conjonction, a du ſurpaſſer celle du Soleil, trois fois; ce qui vraiſemblablement a pu produire des changemens aſſés ſenſibles, par rapport à l'orbite de la Comète; puiſque le mouvement de cet Aſtre dans ſon Aphélie eſt très lent, d'où il devoit reſter aſſés longtemps expoſé à l'action de Jupiter. Au reſte, quoique je n'oſe pas aſſurer que l'action de Jupiter, telle que je viens de la trouver, ſoit très exacte, parceque la moindre altération dans les elémens de la Comète & ſurtout dans le temps de ſa révolution, pourroit en donner une valeur aſſés différente, il ſuffit que par ce raiſonnement il ſoit démontré, que le mouvement de la Comète a pu ſouffrir des changemens très ſenſibles par l'action de Jupiter, & qu'il n'eſt pas contre la vraiſemblance de preſumer, que cet Aſtre a eu auparavant un période de révolution beaucoup plus conſidérable.

A cauſe

A cauſe de l'action de Jupiter, il pourra même devenir douteux, ſi, à l'avenir, on aura la ſatisfaction d'obſerver la Comète dans la même orbite qu'elle parcouroit en 1770; car ſi les élémens que nous venons d'établir étoient tout à fait exacts, la prochaine conjonction de Jupiter avec la Comète ſe feroit l'An 1779 le 23 d'Août à 12 heures à peu près, la Longitude de ces Aſtres étant alors $6^s. 3^\circ. 34'$. Or le calcul prouve, que pour cette Longitude, la diſtance de la Comète à Jupiter eſt à peu près la 491me. partie de ſa diſtance au Soleil, d'où il s'en ſuit que l'action de Jupiter ſurpaſſera celle du Soleil 224 fois, ce qui ne manqueroit pas de produire un changement total dans le mouvement de la Comète. Quoiqu'on ne puiſſe pas compter ſur la plus ſcrupuleuſe exactitude de cette concluſion, vu que des petites variations dans les élémens peuvent donner des réſultats très differents; néanmoins toutes les circonſtances bien conſiderées, on peut ſoutenir, qu'au moins dans l'une ou l'autre des conjonctions de Jupiter avec la Comète de 1767 ou 1779, l'orbite de la Comète a du ſouffrir des changemens ſenſibles, par l'action de Jupiter.

Pour ce qui regarde les deux autres Planètes, Mars & Venus, dont la Comète traverſe les orbites, il eſt ſûr qu'elles ne produiront jamais des changemens tant ſoit peu conſidérables dans le mouvement de la Comète, tant à cauſe du peu de matiere dont ces Planètes ſont douées, que parceque la Comète n'approche pas aſſés près de leurs orbites. Nous avons déja remarqué que lorsque la Comète en 1770 le 1 Juillet paſſoit le plus près de la terre, elle en étoit 70 fois plus proche que le Soleil dans

dans ſa moyenne diſtance de la terre; la diſtance de la Comète à notre Globe égaloit donc à peu près 2 millions 120 mille Verſtes de Ruſſie & elle n'étoit pas même ſix fois plus éloignée de nous que la Lune dans ſa moyenne diſtance. Quelque peu conſidérable que fût cette diſtance, il eſt difficile de prononcer, ſi la terre alors a eu quelque influence pour changer le mouvement de la Comète. Un Mathématicien très célébre a prétendu prouver que la ſphére de l'attraction de notre Globe, ne peut s'étendre beaucoup au delà de 125 demi-diamètres de la terre; ſi cette ſuppoſition étoit bien fondée, la terre n'auroit certainement produit aucun changement dans le mouvement de la Comète, la diſtance de ces corps étant dans leur plus grande proximité, égale à 357 demi-diamètres de la terre. Et même parcequ'on eſt venu à bout de trouver des élémens pour le mouvement de la Comète, qui ſatisfont à toutes les obſervations faites tant avant, qu'après la plus grande proximité de cet Aſtre de la terre, il eſt bien vraiſemblable que l'action de la terre ſur la Comète, a été de peu de conſéquence.

Parmi toutes les Comètes, dont le mouvement eſt conſtaté par les obſervations, il n'y en a aucune, qui ſe ſoit approchée plus près de la terre, que celle de l'an 1770; malgré cette proximité on n'a pas trouvé le moindre indice, que cette Comète ait eu quelque influence, pour changer la conſtitution de notre Globe, entant qu'elle peut ſouffrir quelque altération par l'action des autres corps céleſtes; ceci devroit donc, peut-être plus que d'autres raiſons, ſervir à tranquiliſer nos eſprits

par

par rapport aux effets terribles, par leſquels il a plu à l'imagination de quelques Philoſophes de rendre l'approche des Comètes redoutable. On ne ſauroit aſſurer à la vérité, qu'il ſoit tout-a-fait impoſſible, qu'une Comète ne puiſſe jamais rencontrer notre terre de ſi près, qu'il en réſulte un choc; mais il eſt au moins certain, que la probabilité d'un tel évenement eſt presque infinement petite. Car afin qu'une telle rencontre puiſſe arriver, il faut non ſeulement que la Comète en paſſant par ſon nœud, ſe trouve ſur l'orbite de la terre, mais encore que la terre ſoit en même temps préciſement dans ce point de ſon orbite: Entre toutes les Comètes, dont on connoit les élémens, il n'y en a que trois ou quatre, pour lesquelles la diſtance du nœud au Soleil eſt presque égale au demi-diamètre de l'Ecliptique & quoique la poſition du nœud des dites Comètes puiſſe changer avec le temps, enſorte que quelqu'une d'elles traverſe l'orbite de la terre; ce ſeroit pourtant l' évenement le moins attendu, ſi la terre ſe trouvoit préciſément dans ce point de ſon orbite, lorsque la Comète vient y paſſer.

Pour les cas où la Comète ne peut pas rencontrer la terre, mais pourtant s'en approcher fort près, ce qui peut arriver, même lorsque la Comète eſt aſſes éloignée de ſon nœud; il eſt difficile de determiner en général, quels effets elle aura par rapport à la conſtitution de notre Globe. La grande viteſſe du mouvement de ces corps, lorsqu'ils approchent de leurs Perihélies, auſſi bien que le peu de matiere qu'ils ſemblent avoir, font

préſumer que les effets qu'ils produiſent ſur la terre, ne peuvent pas être d'une conſequence dangereuſe; & parce que la Comète de l'An 1770, qui paſſoit ſi près de nous, n'a cauſé aucun dérangement, ce dont on ſe ſeroit apperçu, il eſt raiſonable, qu'on ſe mette au deſſus de toute crainte par rapport aux Comètes, qui à l'avenir s'approcheront de la terre, d'autant plus qu'un tel événement, s'il arrive jamais, ne peut être ni prévû, ni évité.

OBSER-

OBSERVATIONS
ET
EXPÉRIENCES
Sur les aimans artificiels, principalement ſur la meilleure manière de les faire.

Par Mr. N. Fuſs.

Lues dans l'Aſſemblée publique le 13 Octobre 1778.

De tous les différens objets de Phyſique, qui par leurs merveilleux effets ſont en droit de nous intéreſſer, l'aiman eſt peut-être celui qui a occupé le plus les Philoſophes tant anciens que modernes. Connu à ceux de l'antiquité, il a toujours été un ſujet de leur admiration & de leurs recherches, tant par la ſingularite des Phénomènes qu'il a offerts à leurs regards, que par le profond ſecret, dont la nature en paroit avoir voilé la ſource.

La découverte de ſa vertu *attractive* qui naturellement a du être la première à fixer l'attention des hommes, ſe perd dans l'obſcurité des temps les plus reculés de l'enfance de la Philoſophie. Elle a ſans doute exercé,

 jus-

juſqu'au temps de *Deſcartes*, la ſagacité de bien des Philoſophes, ſans que leurs recherches, ſi l'on peut donner ce nom aux ſimples conjectures qui nous ſont parvenues, ayent transmis autre choſe à la poſtérité, qu'un nouveau monument des égaremens attachés à toute recherche phyſique, qui n'eſt pas accompagnée du flambeau de l'expérience & d'une connoiſſance ſuffiſante des loix générales de la Mécanique, à laquelle nous devons la diſſipation de bien des erreurs & tous les progrès qu'on a faits depuis le dernier Siècle dans l'étude de la Phyſique.

Les découvertes qu'on fit par degrés des autres propriétés de l'aiman — c'eſt de ſa vertu *communicative* & *directive* que je parle — eurent le même ſort: on en retira des avantages pour la ſociété, qui par leur importance ne pouvoient qu'augmenter l'ardeur des ſavans à en découvrir la cauſe & à en augmenter les effets. Mais tous les efforts de ceux, qui avant *Deſcartes* (*) avoient taché d'approfondir ces myſtères, auſſi bien que ceux de ſes ſucceſſeurs qui ont voulu réformer ſes idées, n'ont abouti qu'à embrouiller la queſtion, & à détruire tous les moyens raiſonnables de parvenir à une explication ſatisfaiſante de la nature de l'aiman.

De-

(*) Ce fut ce reſtaurateur de la ſaine Philoſophie, qui, guidé par l'arrangement des limailles de fer à l'entour d'un aiman, introduiſit le premier pour cauſe efficiente & matérielle des ſes Phénomènes un fluide ſubtil, qu'il ſuppoſa parcourir des conduits imperceptibles, & qui par ſon mouvement produiſoit les jeux diférens du magnétisme.

Depuis la fondation des Académies — époque de la diſſipation des tenèbres, qui environnerent l'eſprit humain avant le rétabliſſement des ſciences & ſurtout de la Phyſique expérimentale, qui contribua le plus à le retirer du ſommeil léthargique, où il avoit été plongé pendant des Siècles, — depuis la fondation des Académies on n'a jamais perdu de vue cet intéreſſant objet. Au contraire, à meſure que ſe multiplioient les découvertes, qui commencerent à ſe ſuccéder alors auſſi rapidement que la liaiſon entre elles l'exigeoit; & à meſure que ſe préſentoient de nouveaux phénomènes, on s'efforça de plus en plus d'en rendre raiſon. Ces ſociétés littéraires, non contentes de renfermer en elles mêmes des membres éclairés, qui ſe hazardoient tantôt avec plus tantôt avec moins de ſuccès ſur cette gliſſante carrière, n'epargnerent ni honneurs ni récompenſes, pour engager d'autres ſavans à joindre tous les efforts poſſibles aux leurs, pour percer à forces communes à travers le voile myſtérieux de la nature.

C'eſt dans cette vue par exemple, que l'Académie Royale de Paris, dont les ouvrages ſont remplis des recherches les plus importantes ſur l'aiman & ſes propriétés, par des prix conſidérables propoſés autre fois ſur des queſtions rélatives à ce ſujet, a donné naiſſance à pluſieurs excellens mémoires qui, en diſſipant les anciennes erreurs, en proſcrivant les qualités occultes, les forces attractives & répulſives, les cauſes non-mécaniques & immatérielles & d'autres explications qui n'expliquoient rien, ont établi une Théorie ſaine & conforme à tous les différens Phénomènes de l'aiman, qui a été adoptée enſuite par tous les Philoſophes non prévenus & Amis de la verité, in-

corruptibles par des hypothèſes moins vrayes que brillantes, que le goût de la nouveauté avoit fait eclorre.

Car quelques différentes que paroiſſent au premier coup d'oeil les nouvelles Théories du magnétisme qui parurent à cette occaſion, elles s'accordent pourtant merveilleuſement en ce que pour expliquer les myſtères de l'aiman elles ont toutes également recours à un fluide infiniment délié & élaſtique, dont on a taché, ſi non de démontrer rigoureuſement l'exiſtence, du moins de la rendre auſſi vraiſemblable, qu'on peut l'exiger dans des choſes qui, échappant à la foibleſſe de nos organes, ne tombent ſous aucun de nos ſens. Le mouvement de ce fluide dans les pores de l'aiman & des autres corps magnétiques, qu'on conçoit unanimement former des tuyaux contigus, parallèles & hériſſés, comme les veines & les vaiſſeaux lymphatiques & d'autres conduits deſtinés pour la circulation des humeurs dans l'économie animale, de petits poils ou des ſoupapes qui, couchées dans le même ſens, donnent un libre paſſage au fluide, qui s'inſinue dans les pores ſuivant la même direction & ſe refuſent au contraire à tout mouvement en direction oppoſée — ce mouvement, dis-je, explique enſuite avec un merveilleux accord tous les jeux différens du magnétisme. (*) Les Auteurs illu-

(*) Quoiqu'en diſent pluſieurs Phyſiciens, qui, ſans nier ni l'eſpèce d'Atmoſphère qui environne les aimans, ni l'exiſtence de la matière extrèmement déliée. que nous appellons magnétique, lui ont refuſé tout mouvement progreſſif: croyant non ſeulement ſuperflu de le ſuppoſer. mais même contraire au mécanisme général de la Nature, le quel n'a pourtant jamais été mieux confirmé, que par la

illuſtres de ces ingénieuſes Théories ne different donc eſſentiellement entre-eux, que dans l'explication de la manière, dont ſe perpétue ce mouvement.

Mon deſſein n'eſt pas de décider ici, ſi c'eſt par un mouvement interne des parties de l'aiman, ou par une dilatation & conſtriction alternative de ſes pores, ou par un mouvement d'ondulation de ſes fibres tendues en harmonie avec le mouvement du fluide, ou enfin par la ſeule force élaſtique de l'ether, que ſe perpetue ce mouvement. Je ne prononcerai pas non plus ſur le mérite de ces differentes hypothèſes, les bornes de mon diſcours ne me permettent pas de le faire. Mais je ne ſaurois m'empêcher d'obſerver, qu'avec quelque art que pluſieures explications de cette perpétuité des tourbillons magnétiques ſoyent établies & quelque peu qu'on puiſſe proférer avec fondement contre leur verité, celle de Mr. *Euler* (*) propoſée

la Théorie de Mr. *Euler*. Cette Théorie loin de faire violence aux loix générales de la Mécanique, réduit au contraire tous les différens phénomènes à peu de principes. Son Auteur ne forge pas des explications particulières pour chaque phénomène particulier, comme ſe voient obligés de faire la plupart de ceux, qui nient en mouvement.

(*) Comme toutes les explications des Phénomènes, qui ſe ſont préſentés pendant le cours du travail que je vais détailler, ſont fondées ſur l'excellente Théorie de Mr. *Euler*, qu'il me ſoit permis d'en donner ici un petit précis. — La Théorie dans une note — j'en ſens moi même l'inconvénient; mais je crois devoir cette attention à pluſieures perſonnes que j'eſtime & qui, après avoir entendu la lecture de ce Diſcours, avoient déſiré que j'ajoutaſſe l'eſſentiel de la Théorie, ſur la quelle j'ai inſiſté dans l'explication de ces phénomènes.

Mr.

poſée autre fois à l'occaſion du Prix mentionné me paroit préférable à tous égards à ſes rivales, ſurtout par ſa ſim-

---

Mr. *Euler*, en partant de l'idée heureuſe de *Descartes*, fait d'abord voir, qu'il y a deux cauſes principales qui concourent à produire les merveilles de l'aiman: La premiere eſt une ſtructure particulière des parties internes de l'aiman & des corps magnétiques, que perſonne ne pourra nier ſérieuſement, par la raiſon même que ces corps ſont doués de propriétés, qui les diſtinguent ſi eſſentiellement de tous les autres. L'autre cauſe eſt une matière externe qui, en agiſſant ſur les pores des corps magnétiques & les traverſant, produit les phénomènes de l'aiman. Cette matière, ſans être créée arbitrairement pour expliquer uniquement les merveilles de l'aiman, ce qui ſans doute ſeroit faire violence à la nature, fait partie de l'atmoſphère ſolaire, ou de ce fluide extrèmement délié que nous nommons matière étherée, qui remplit tout nôtre Syſtème & qui pourra renfermer ce fluide plus ſubtil encore de la même manière qu'il eſt renfermé lui même dans l'air & l'air dans l'eau — mélange & gradation qui eſt ſi peu contraire au loix de la nature, qu'on l'obſerve même dans tous ce qui nous environne.

Ce fluide qui, comme on peut voir dans une infinité de phénomènes, traverſe librement & en tout ſens tous les corps non-magnétiques, doit parcourir l'aiman en vertu de ſa force directive dans la direction des poles. Mais comme outre cette direction les poles ont encore la propriété d'affecter toujours la même poſition, il faut non ſeulement que le fluide ne traverſe l'aiman que dans une direction conſtante, mais que ce cours ne puiſſe ſe faire que dans un ſeul ſens & que la matière qui coule de *A* en *B*, ne puiſſe replier de *B* en *A*. Pour produire cet effet il eſt plus que probable, que la nature ait employé le même artifice qu'on a obſervé dans l'économie animale, où les veines & les vaiſſeaux lymphatiques, déſtinés à conduire des humeurs ſans leur permettre un mouvement rétrograde, ſont garnis dans leur intérieur de petits poils ou valvules, qui cèdent à l'action du fluide dans un ſeul ſens & ſe ferment à chaque effort, qu'il pour-

ſimplicité, la quelle, de l'aveu de tous les Philoſophes, repond ſi bien à la ſage économie de la nature, qui affecte toujours dans ſes ouvrages cette même ſimplicité. Sans s'éloigner des ſuppoſitions préalables de ce fluide & de la diſpoſition ſus-dite des pores de l'aiman, que Mr. *Euler* adopte avec les autres Phyſiciens, il ne lui faut que l'éla-

---

pourroit faire pour reculer. Nous concevons donc que les pores de l'aiman forment pluſieurs tuyaux *A B* (Fig. 1.), contigus, parallèles & ſi étroits, qu'ils ne laiſſent paſſer que la partie la plus pure & la plus déliée de l'ether, qui, environnant l'aiman de toute part, ſera pouſſée par l'élaſticité de l'éther dans ces conduits vuides en *A*, & les traverſera avec un mouvement libre de tout obſtacle juſqu'en *B*, où, ne pouvant reculer à cauſe des arrêts *a a b b*, elle vaincra la réſiſtance de l'éther, qui crée ce mouvement & le perpétue. Car ſuppoſant le pole *A* d'un aiman (Fig. 2.) couvert de pluſieures embouchures de tuyaux ſemblables, le fluide magnétique, preſſé par la partie la plus groſſière de l'éther, s'y plongera continuellement avec une viteſſe inconcevable & proportionnée à la force élaſtique connue de ce fluide & continuera ſon mouvement juſqu'en *B* avec la même rapidité. Arrivée en *B* la matière, ſéparée juſqu'ici de cette partie plus groſſière pendant ſon cours par les canaux de l'aiman, la rencontrera de nouveau à ſa ſortie & en ſouffrira un ralentiſſement dans ſa viteſſe & en même temps un changement de direction. Le courant, réfléchi pour ainſi dire par l'éther, avec lequel il ne peut pas ſe méler d'abord, ſe repliera des deux côtés vers *C* & *D* & décrira avec un mouvement ralenti des courbes *D E a* & *C F c* &c. Il s'approche enfin de l'entrée en *A*, s'y replonge par des tours en *d* & *c* avec la matière affluente *m n*, & forme par là cet tourbillon remarquable, qui eſt viſible dans l'arrangement de la limaille de fer ſemée ſur un papier placé ſur l'aiman, & qui à l'aide du tourbillon univerſel, produit par un mouvement ſemblable d'un pole magnétique de la Terre à l'autre, explique tous les différens phénomènes de l'aiman.

l'élaſticité, cette autre propriété reconnue de l'éther, pour expliquer de la manière la plus aiſée cette conſervation du mouvement, ſans recourir à un mouvement interne des corps ſolides qui, quelque probable qu'il ſoit en lui même, eſt pourtant tout auſſi difficile à concevoir que celui dont il doit expliquer la perpétuïté. — Au reſte il ſuffit d'accorder la dernière, pour expliquer tous les différens phénomènes tant de l'aiman que de l'acier chargé de la vertu magnétique (*).

On connoiſſoit depuis long-temps la propriété de l'acier, de ſe charger de cette vertu, à laquelle nous ſommes redevables de tous les avantages que l'aiguille aimantée a procurés à la ſociété. Cette connoiſſance dirigea enfin la vue des Phyſiciens du côté des aimans artificiels qui, par les ſecours qu'ils prétoient à la comparaiſon de la Théorie avec les Phénomènes, & par les Phénomènes qu'ils fourniſſoient eux mêmes, méritèrent d'autant plus d'at-

(*) De ce que le fer & l'acier ſont ſuſceptibles de la vertu magnétique, on doit conclure que ſes pores admettent par l'art une diſpoſition ſemblable à celle que le nature a produite elle même dans l'aiman. Ils ſeront d'abord confuſément diſperſés par toute la maſſe de l'acier & n'attendront que cet arrangement artificiel, qui en faſſe des conduits parallèles & contigus ; pour lui faire acquerir les mêmes propriétés Le fer les acquiert avec la plus grande facilité; mais ſes pores trop mobiles ne ſont pas propres à les lui faire garder long-temps. On n'a qu'à enviſager les figures 3, 4 5, deſſinées d'après la diſpoſition des limailles de fer, pour concevoir, combien les fers moux *A*, *A*, *A*, offrent de tout côté un paſſage libre au fluide qui s'y inſinue des barreaux d'acier *B*, *B*, *B*. L'acier plus dur ſe refuſe plus longtemps à la diſpoſition régulière de ces conduits, & il faut bien plus de peine pour y exciter des tourbillons ſemblables à ceux qui environnent les aimans naturels.

d'attention, qu'ils paroiſſoient conduire à la voie unique de conſtater ou de perfectionner une Théorie, qui n'étoit encore qu'hypothétiquement vraie. D'ailleurs la facilité de ſe procurer des aimans, dont la force étoit ſouvent ſupérieure à celle des meilleurs aimans naturels, & le beſoin même de s'en ſervir dans la fabrique des aiguilles de bouſſole, en avoit rendu précieuſe la découverte auſſi bien que les efforts de quelques Phyſiciens modernes, qui travaillèrent avec ſuccès à rendre la méthode de les préparer moins pénible & plus efficace.

Les prérogatives des aimans artificiels par rapport aux naturels, & la diverſité des méthodes propoſées autrefois par MM. *Knight*, *Michell*, *le Maire*, *Canton* & d'autres, engagèrent l'Academie de St. Petersbourg à propoſer en 1758 un prix ſu la meilleure manière de faire ces aimans artificiels. La pièce couronnée à cette occaſion eſt remplie de remarques intereſſantes ſur ce ſujet. Mr. *d'Antheaulme*, qui en eſt l'Auteur, y propoſa un nouveau procédé qui, à ſon avis, l'emportoit de beaucoup ſurtous ceux qu'on avoit connus juſqu'alors.

Nouvellement l'Académie a eu l'avantage de recevoir de la part de S. E. Mr. le Conſeiller d'État actuel *de Krouſe* une collection complette de pièces d'acier des plus exquiſes par rapport à la grandeur de quelques barres & à leur gradation, qui monte depuis 6 pouces juſqu'à $2\frac{1}{2}$ pieds de longueur. Cette collection fut remiſe à Mr. *Euler*, à qui elle a donné l'occaſion de faire pluſieures expériences d'autant plus intéreſſantes, qu'outre les éclairciſſemens que la Théorie du magnétiſme peut s'en promettre dans

la ſuite, la variation des procédés employés pour aimanter toutes ces piéces (*) & les phénomènes qui ſe ſont préſentés pendant ce travail, nous ont mis en état d'aprécier l'efficacité de chacune; d'en tirer des préceptes & des précautions à prendre pour en accélérer l'effet; d'éviter des fautes, où d'autres ont pu être conduits par des concluſions générales, tirées d'effets qui tenoient ouvertement à des cauſes fortuites & particulières, & de propoſer enfin de nouvelles méthodes, dont le ſuccès avoit été plus heureux & la manœuvre plus aiſée.

C'eſt de ces expériences que j'ai détaché une partie, pour en entretenir cette illuſtre Aſſemblee ſuivant l'intention de S. E. Monſieur le Chambellan actuel *de* *Do-*

(*) La collection, qui fut expoſée le jour de l'Aſſemblée dans la Salle de Conférence, conſiſte en

10 Lames de	6 Pouces de longueur.	½ P. de largeur.	⅛ P. d'épaiſſeur
12 - -	12 - - - - -	1 - - - - -	¼ - - -
9 - -	18 - - - - -	1½ - - - - -	⅜ - - -
8 - -	24 - - - - -	2 - - - - -	½ - - -
9 - -	30 - - - - -	2½ - - - - -	⅝ - - -

avec leurs contacts de fer doux de même largeur & épaiſſeur; enſuite en

5 Barres de	6 Pouces de longueur	½ P. de largeur & épaiſſeur
4 - - -	12 - - - - - - - -	1 - - - - - - - -
4 - - -	18 - - - - - - - -	1½ - - - - - - - -
2 - - -	24 - - - - - - - -	2 - - - - - - - -
2 - - -	30 - - - - - - - -	2½ - - - - - - - -

avec leurs contacts de même largeur & épaiſſeur. Enfin en 9 fers à cheval chacun d'une ſeule lame, de quatre différentes grandeurs, avec leurs ſupports, & pluſieurs demi-cercles auſſi de grandeur différente.

Domaſchnef, notre digne Directeur, qui a bien voulu aſſiſter à pluſieures d'entre-elles & les honorer de cette attention, qu'inſpire l'amour des Sciences & l'étendue des connoiſſances que S. E. s'eſt acquiſes. Mais pour éviter la trop grande prolixité, où un ſujet auſſi fécond qu'important auroit pu me conduire, je me vois obligé de me borner uniquement à celles de ces expériences qui concernent les meilleurs moyens de rendre l'acier magnétique, comme les premières que nous a pu fournir le travail de communiquer le magnétisme à cette collection.

Avant que d'entrer en matière il ſera bon de remarquer encore par rapport à cette collection, que la différente grandeur de ſes pièces, dont les dimenſions croiſſent dans la même proportion, lui donne un plus grand prix, par la facilité qu'elle fournit de commencer d'abord à aimanter, ſans le ſecours d'aucun aiman ni artificiel ni naturel, les petites lames de 6 pouces, moyennant lesquelles on peut paſſer enſuite à celles de 12 pouces, dont on peut ſe ſervir pour frotter celles de 18 & ainſi de ſuite; procédé qui dans les méthodes ordinaires accélère extrêmement l'effet des opérations, & qui eſt d'un grand ſecours, toutes les fois qu'il faut réparer l'affoibliſſement inſéparablement attaché à tous les aimans artificiels, ſurtout pendant qu'on en fait uſage, pour communiquer le magnétisme à d'autres. Car on conçoit aiſément, qu'une exceſſive diſproportion entre les pièces à frotter & celles dont on ſe ſert pour cet effet, doit ralentir ſenſiblement le ſuccès de ce travail; quoique, contre l'opinion vulgaire, elle n'en anéantit pas l'effet au point, qu'il ſoit impoſſible d'aimanter des pièces de grandeur conſiderable

moyennant d'autres beaucoup plus plus petites; car j'aurai l'occaſion de faire voir dans la ſuite, qu'il y a des moyens de rendre ce travail très efficace, non-obſtant la disproportion des barres.

Pour aimanter cette collection, tout revenoit donc à donner aux petites lames de ſix pouces un degré de force ſuffiſant, pour pouvoir en faire uſage enſuite à frotter ſuivant la méthode de Mr. *Michell* (*) celles de 12 pouces & monter de celles-ci ſucceſſivement aux plus grandes & aux barres mêmes jusqu'à celles de 30 pouces de longueur. Le commencement pouvoit même ſe faire, comme j'ai déja remarqué, ſans le ſecours d'aucun aiman ni naturel ni artificiel, en faiſant uſage de l'une ou de l'autre des méthodes, propoſées par différens Phyſiciens, qui furent conduits ſucceſſivement à cette découverte ou par des accidens ou par l'obſervation du Pere *Grimaldi*, qui remarqua le premier vers le milieu du ſeizieme ſiècle, qu'il ſuffiſoit de tenir verticalement une barre de fer, pour lui communiquer un degré de vertu magnétique tel, que ſon extrémité inférieure attire, ou que ſon extrémité ſupérieure repouſſe le pole auſtral de l'aiguille aimantée, & qu'on puiſſe même changer les poles de cette barre, auſſi-tôt qu'on la retourne.

Les mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris contiennent un grand nombre d'expériences & d'obſervations pareilles, également intéreſſantes & propres à mettre hors de doute la propriété du fer de ſe charger de

(*) Treatiſe of Artificial Magnets.

de la vertu magnétique, ſans l'attouchement d'aucun aiman. Le hazard avoit offert à MM. *Gaſſendi* & *de la Hire* des Phénomènes tout à fait ſemblables. Mr. *Rohault* trouva qu'un morceau d'acier rougi au feu & ſuſpendu verticalement attiroit des limailles de fer, & Mr. *du Fay* ajouta à cette expérience un autre fait très remarquable, ſavoir: qu'en ſuſpendant verticalement une barre & la frappant à coups de marteau à l'une ou l'autre extrémité, le bout frappé acquerroit toujours la vertu du pole boreal & attiroit le ſud de l'aiguille, pendant que le bout oppoſé le répouſſoit; propriété qui, à ce qu'il aſſure, ſubſiſta encore dans toute autre ſituation de la barre —. Je paſſe ſur pluſieures autres obſervations pareilles, qui toutes ſervirent également à conſtater l'eſpèce d'analogie, connue depuis longtemps entre l'aiman & le fer; mais qui ne pouvoient être d'un grand ſecours dans la fabrique des aimans artificiels. — M. *Michell* & *Canton* avoient trouvé des moyens plus efficaces pour communiquer par le frottement un commencement ſenſible de force magnétique à des barreaux d'acier.

Le premier plaça entre deux barres de fer dirigées ſuivant la direction du méridien magnétique une petite lame d'acier, à la quelle il communiqua dans cette poſition un force conſidérable, en gliſſant ſur ſes faces une troiſième barre tenue verticalement & inclinée un peu vers le nord. L'autre attacha au bout ſupérieur d'un fourgeon de fer, placé verticalement, une petite lame d'acier ſuivant la longueur, qu'il frotta enſuite de bas en haut avec le bout inférieur d'une pincette de cheminée, tenue à peu près en ſituation verticale; de cette façon

la

la lame acquit un commencement de vertu magnétique très ſenſible.

Mais de toutes les méthodes d'aimanter l'acier ſans autre aiman, celle que Mr. *d'Antheaulme* a propoſée dans le mémoire couronné par l'Académie, eſt ſans doute la plus efficace. Il plaça de file deux barres de fer de 4 à 5 pieds de longueur ſur 15 lignes d'épaiſſeur, diſpoſées dans la direction du tourbillon général, ou du méridien magnétique, inclinées vers le nord de 70 degrés & ſéparées par un intervalle de ſix lignes. Il appliqua aux deux bouts qui ſe regardoient une eſpèce d'armure de 14 à 15 lignes de largeur, ſur une ligne d'épaiſſeur, dont le côté appliqué à la barre étoit entièrement plat; trois des bords de l'autre face taillés en biſeau & le quatrième, excédant d'une ligne l'épaiſſeur de la barre, limé quarrément. Sur cette eſpèce de talons il promena lentement la barre à aimanter d'un bout à l'autre, ce qui lui communiqua un degré très éminent de force. Mr. *d'Antheaulme* ajoute, qu'en faiſant uſage dans ce procédé de barres de 10 pieds de longueur, on ſeroit en état d'aimanter des barres d'acier d'un pied de longueur, avec un ſuccès égal à celui qu'on pourroit attendre de l'uſage du meilleur aiman. Et Mr. *de la Lande*, qui avoit vu repéter la plûpart des expériences de Mr. *d'Antheaulme*, parle dans ſes obſervations ſur les aimans artificiels (*) d'une autre expérience plus récente de cet habile expérimentateur, faite ſur deux barres de 15 pieds de longueur. Ces procédés, quelque embarraſſans qu'ils ſoyent par

(*) Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris Année 1761.

par la néceſſité de ſe ſervir de barres rangées en file de 10, 20 & 30 pieds de longueur, ſont tout-à-fait remarquables par le merveilleux effet qu'ils produiſent & par des marques auſſi ſenſibles de magnétisme, que de barres de fer tout brut peuvent donner, ſans aucune des préparations qu'on avoit crû eſſentiellement néceſſaires avant Mr. *d'Antheaulme*; d'autant plus que le ſeul tourbillon général, dont la matière eſt infiniment moins raſſemblée que celle des tourbillons particuliers des aimans, ne parût jamais promettre que des effets très médiocres —.

Après cette digreſſion ſur les différentes manières de communiquer le magnétisme ſans aimans, je vais détailler celles dont nous avons fait uſage pour aimanter les pièces d'acier de la préſente collection.

Opération. I.

Lames de 12 pouces. Double touche inclinée.

Mr. *Euler* poſſédoit encore quatre lames d'acier de 15 pouces de longueur, fabriquées à Bâle par feu M. *Dieterich*, celèbre Artiſte en aimans artificiels, qui, quoique privées de leurs contacts & négligées depuis bien d'années, avoient conſervé encore quelque peu de vertu magnétique. Nous nous en ſervimes d'abord pour frotter les lames de 12 pouces, dont nous plaçames deux *AB* & *CD* (Fig. 6.) parallèlement ſur une table, en les réuniſſant aux quatre extremités par des contacts de fer doux *E*, *F*, afin de conſerver pendant l'opération le tourbillon magnétique qu'elle

qu'elle y devoit former (*). Les ayant donc placées enſorte que le bout marqué A de l'une regardoit le bout non-marqué C de l'autre (précaution qu'on a coûtume de prendre, pour pouvoir diſtinguer enſuite entre-eux les poles attractifs & répulſifs (**)), nous prîmes les lames

(*) Lors qu'il y a deux barres *A B*, *a b*, ainſi diſpoſées & aimantées, le tourbillon de l'une ſe réunit à celui de l'autre. Le fluide, ſortant par exemple du pole *A* (Fig. 7.) qui ſe détournoit autrefois des deux côtés également, ſe replie maintenant vers le pole ami *b* de l'autre barre, où il s'unit à la matiére affluente vers ce pole & y entre avec elle pour parcourir toute la barre de *b* jusqu'en *a*, où il ſe détourne de nouveau pour rentrer dans la premiére par *B*. Mais comme il s'en perd toujours une quantité conſidérable à la ſortie & à l'entrée des conduits, on les garnit de morceaux de fer doux qui, comme nous avons vu dans la note quatrième, le transmet librement & empêche que rien ne puiſſe ſe perdre pendant le trajet d'un pole à l'autre, par la tendence du fluide à ſe jetter partout dans des pores vuides, plutôt que de traverſer l'air qui réſiſte à ſon mouvement.

(**) En conſéquence de ce que j'ai dit de la Théorie de Mr. *Euler* dans la note 3me. on concevra facilement ce que c'eſt que les poles attractifs & répulſifs, & de quelle manière ſe fait cette attraction & répulſion mutuelle. Deux lames aimantées *A B* & *a b* (Fig. 8.) étant diſpoſées enſorte que les arrêts des pores de toutes les deux ſoyent couchés dans le même ſens p. e. de *A* vers *B* & de *a* vers *b*, le fluide traverſant la première ſuivant *A B* trouve d'abord les pores du pole *a* de l'autre ouverts pour le recevoir. Il traverſera donc auſſi celle-ci & en ſortant par *b* il ſe détournera d'abord vers *A* pour continuer ſon courant par les deux barres & ne formera par conſéquent qu'un ſeul tourbillon qui, preſſé de toute part par le force élaſtique de l'éther pouſſera les deux aimans l'un vers l'autre. Si au contraire les deux poles *B* & *b* (Fig. 9.) ſe regardent, ou que les poils des pores de la barre *ba* ſont couchés en ſens contraire, le fluide ſortant par *B* ne trouvera

mes de 15 pouces G H, I K, dont nous mîmes les poles attractifs G & I ſur le milieu des lames à aimanter, en les relevant par les bouts oppoſés H & K, enſorte que les extrémités, appliquées à la lame, & diſtantes entre-elles de 3 à 4 lignes à peu près, faiſoient un angle obtus de 100 à 120 degrés. Dans cette poſition nous les promenâmes doucement ſur la lame A B d'un bout à l'autre, en allant & revenant une quinzaine de fois. Après avoir fait la même manœuvre, les poles tournés (*), ſur l'autre lame C D & enſuite ſur les faces poſées, les deux pièces, à en juger par l'adhérence des contacts, avoient reçu un dégré de force ſenſiblement ſupérieur à celui des lames frottantes de 15 pouces, & ſuffiſant pour notre deſſein, qui n'étoit que de leur donner un commencement de vertu magnétique que nous pouvions augmenter enſuite facilement de la manière que je vais indiquer.

Après avoir aimanté de la même manière & au même dégré dix de ces lames, que je fortifiai d'abord, une paire avec l'autre, en ſuivant le même procédé, juſqu'à ce que l'adhérence des contacts parût me prouver qu'il n'y avoit plus d'augmentation à attendre de cette méthode

vera pas des pores diſpoſés à le recevoir dans l'autre. Les deux barres auront donc leurs tourbillons particuliers *A E B F* & *a e b f* qui, ne pouvant ſe continuer librement dans leur voiſinage, ſe repouſſent mutuellement en *d* & *c*, & cet effet réjaillit ſur les barres mêmes, avec d'autant plus de force que le courant eſt plus vif & plus fourni.

(*) C'eſt à dire que le bout marqué de l'une regardoit toujours le bout non-marqué de l'autre & réciproquement.

méthode; j'en formai deux faiſceaux AB & CD (Fig. 10.) chacun de 5 lames, arrangées en ſorte, que les bouts marqués de l'un & l'autre étoient enſemble. Je diſpoſai parallèlement ces deux faiſceaux, ſéparés par un morceau de bois *m n* de trois lignes d'épaiſſeur, & après les avoir liés enſemble & réunis par les bouts, dont les marqués B de l'un regardoient les non-marqués D de l'autre, par des contacts de fer E, F, afin d'y conſerver la circulation, je m'en ſervis de la manière ſuivante:

Opération II.

Lames de 18 pouces. Double touche verticale.

Je diſpoſai, comme dans l'opération précédente, deux des lames de 18 pouces en ſituation parallèle, avec la précaution de les tenir fermes pendant le frottement entre leurs contacts, afin d'empêcher tout mouvement de côté & toute altération de la figure rectangulaire nuiſible à l'effet de la manœuvre. Je gliſſai ſur l'une de ces lames une vingtaine de fois le faiſceau préparé de celles de 12 pouces & après en avoir tourné, ſur le contact de fer, les poles, dont les attractifs, comme on ſçait, doivent toujours regarder les poles attractifs des lames à aimanter & réciproquement. Je les promenai autant de fois ſur l'autre lame & enſuite ſur les faces oppoſées, avec la précaution de réunir les bouts frottans du faiſceau par ſon contact, avant que de le retirer de la lame, afin d'éviter la perte infaillible des forces qu'on ne ſçauroit aſſés ménager, ſurtout au commencement, lorſque les pièces ſont encore plus ſenſibles à la moindre altération du tourbillon.

Après

Après avoir aimanté de cette façon trois paires des lames de 18 pouces, je les diſtribuai en faiſceaux ſemblables à ceux des lames de 12 pouces, pour fortifier à leur aide celles-ci, ſenſiblement affoiblies par les opérations précédentes. Cette touche leur communiqua un dégré de force magnétique très éminent. L'adhérence des contacts fut telle, que les lames ſe tinrent deux à deux en ſituation verticale comme ſuſpendues au contact relevé, malgré les mouvemens inévitables d'oſcillation & de l'altération de l'équilibre, troublé par le moindre gliſſement.

Le ſuccès de cette opération m'engagea à renforcer encore de le même manière les lames de 18 pouces, moyennant un faiſceau de celles de 12, afin de paſſer enſuite avec plus de ſuccès aux plus grandes lames & aux barres mêmes. Je formai en conſéquence un faiſceau de 4 paires, dont je fis uſage pour fortifier les trois paires de 18 pouces; mais ne prenant point garde à la ſeconde paire aux marques du faiſceau, j'en plaçai les bouts marqués vis-à-vis du bout marqué de la lame que j'aimantois, & je lui donnai par conſéquent une contre-touche, qui eût naturellement l'effet de la priver d'abord, ainſi que ſa compagne, de toute la force qu'elles avoient eue auparavant, & de leur en communiquer enſuite de nouvelles en ſens contraire; c'eſt à dire qu'après avoir détruit la circulation du fluide magnétique & excité par la continuation du frottement un nouveau courant qui tourbillonnoit en direction oppoſée, le pole qui auparavant avoit attiré le Nord de l'aiguille le repouſſoit maintenant, & réciproquement de l'autre. Mais

un autre effet plus inattendu, & dont l'obſervation me paroît très importante dans cette pratique, c'eſt qu'après avoir redreſſé la mépriſe & recommencé à gliſſer le faiſceau avec les égards convenables par rapport aux poles, les lames reprîrent non ſeulement en peu d'inſtans des forces en ſens contraire, mais je leur en communiquai même, par ce changement des poles, à un degré ſenſiblement ſupérieur à celui des autres lames, qui n'avoient pas reçu de contre-touche.

Soit que l'ancien cours du fluide magnétique, troublé par ce changement ſucceſſif des poles & même repouſſé en vertu de la direction oppoſée & de la ſupériorité des forces du courant qui s'élançoit du faiſceau, acquiere par là plus de viteſſe, à meſure qu'il s'unit au nouveau tourbillon, diſpoſe les pores de la lame à le conduire & à le propager dans ce ſens, & en débouche enfin des nouveaux; ſoit que les poils, ou ſoupapes, dont nous ſuppoſons garnis les canaux magnétiques, deviennent plus flexibles par le changement ſucceſſif de direction qui les ferme & r'ouvre alternativement: il n'y a, ni dans le prompt effet de l'opération, ni dans le dégré ſupérieur de forces qui en réſulte, la moindre choſe qui ne ſoit conforme aux loix de la Théorie adoptée.

Engagé par cette obſervation, que je dois à un pur hazard, à répéter ce travail, j'ai taché d'en conſtater la vérité & de m'aſſurer de ſon effet par pluſieures expériences avec un ſuccès également heureux. C'eſt pourquoi je crois pouvoir propoſer ce procédé comme très utile dans le maniement des pièces d'acier de fine trem-

trempe, qui ordinairement oppoſent le plus de réſiſtance à l'entrée & à la circulation de la matière magnétique & retardent beaucoup l'effet du frottement. Je craignois à la vérité que ce procédé, quelque recommendable qu'il paroiſſe par la promptitude de l'effet, n'eût le défaut, que par la mobilité augmentée des arrêts les conduits fuſſent moins propres à conſerver la circulation dans le même ſens; mais comme les affoibliſſemens tiennent beaucoup plus à un dérangement total des conduits magnétiques qu'à un relachement de leurs poils, je ne me ſuis jamais apperçu de la moindre différence entre les pièces ſoumiſes à ces expériences & celles qui n'avoient pas reçu de contre-touche: le décroiſſement des forces étoit conſtamment le même aux unes & aux autres.

Opération III.

Barres de 12 pouces. Double touche verticale.

Ayant aimanté ſix lames de 18 pouces de la manière que je viens de rapporter, je les diſtribuai, trois à trois à marques égales, en deux faiſceaux écartés par un morceau de bois de 4 lignes d'épaiſſeur, & après les avoir ſerrés & réunis aux bouts ſupérieurs par un contact de fer, je gliſſai les inférieurs ſur la face d'une barre de 12 pouces: car j'en avois placé deux de cette longueur parallèlement avec leurs contacts, comme dans les opérations précédentes. Celle-ci, continuée ſur l'autre barre, à la quelle je paſſois toujours par les contacts, ſans détacher le faiſceau, & enſuite ſur les trois autres faces, douze

traits

traits ſur chacune, fut ſuffiſante pour les rendre magnétiques au point de pouvoir être relevées par les contacts (*).

Je me ſervis enſuite avec un aſſés bon ſuccès du même faiſceau, pour aimanter les barres de 18 pouces; mais à cauſe de la groſſeur de ces barres & de l'affoibliſſement que le faiſceau avoit ſubi pendant l'opération précédente, elles ont demandé plus de temps, pour recevoir aſſés de force pour pouvoir être trainées par les contacts.

Opération IV.

Barres de 18 pouces. Double touche à compas.

Pour augmenter le magnétiſme de ces mêmes barres Mr. *Euler* ſe ſervit de deux barres de 12 pouces, AB & CD (Fig. 11.) douées du plus haut dégré de force qu'il avoit été capable de leur communiquer en fortifiant une paire par l'autre. Il en preſſa les bouts ſupérieurs B, D l'un contre l'autre, pendant que les inférieurs A, C,

(*) Je dois remarquer ici qu'il auroit été inutile de déterminer plus exactement le degré de force produit par chaque opération. Il ne s'agiſſoit que de pouvoir juger en gros de l'effet des différens procédés, pour être en état de remarquer le plus ou le moins d'efficacité de chacun; & pour cet effet les concluſions tirées de l'adhérence des contacts, qui facilitèrent outre cela la comparaiſon des pièces de maſſe différente, étoient douées d'un degré ſuffiſant de préciſion. D'ailleurs les préparatifs attachés à l'appréciation exacte des poids portés par toutes ces barres après les réiterations continuelles des forces uſées, auroient trop arrêté le cours de mon travail.

A, C, ſéparés par un morceau de bois *e* de 5 lignes d'épaiſſeur, gliſſoient ſur la face de l'une de ces barres *a b*, dont il y en avoit toujours deux *a b* & *c d*, placées parallèlement avec leurs contacts *f* & *g*. Ce procédé en augmenta la force au point qu'on pouvoit les relever par les contacts.

Opération V.

Lames de 24 pouces. Quadruple touche verticale.

Après avoir renforcé trois paires des lames de 18 pouces & cinq de douze, réunies enſuite en faiſceaux, nous en fimes uſage pour aimanter à la fois à quadruple touche deux lames de 2 pieds, en les gliſſant à traits égaux & uniformes ſur leurs faces. L'effet de cette manoeuvre, propoſée il y a long-temps par Mr. *Euler*, fut auſſi efficace que rapide; car de cette manière les conduits magnétiques, débouchés en même temps dans les deux lames, donnent d'abord paſſage au fluide, qui s'y élance avec impétuoſité des deux faiſceaux, & qui, ne rencontrant nulle-part des obſtacles ſur ſon chemin, peut librement tourbillonner d'une lame à l'autre à travers les contacts qui en reuniſſent les extrémités, au lieu que dans la double touche les premiers traits appliqués à la première lame reſtent toujours ſans effet, puiſque le fluide qui s'y décharge, trouvant bouchés les conduits de l'autre lame, ne peut continuer ſa route, s'arrête & ſe diſperſe pour la plûpart à leur entrée, ſurtout ſi l'acier eſt d'une trempe très dure. La circulation ne commence à ſe former en liberté, que lorſque les deux lames ſont aimantées égale-

 ment;

ment; vérité dont on peut ſe convaincre facilement par l'adhérence des contacts.

Avant cette opération j'avois déjà eſſayé la double touche pour aimanter ces lames, mais avec très peu de ſuccès, ce que j'ai lieu d'attribuer à l'huile, dont j'avois frotté la ſurface, rongée en pluſieurs endroits par la rouille. Dès que je les eus nettoyées de l'un & de l'autre, l'effet en fut bien plus ſenſible, quoique toujours très inférieur à celui de la quadruple touche.

Nous fimes uſage du même procédé & des mêmes faiſceaux pour aimanter à diverſes repriſes les barres de deux pieds, qui malgré leur maſſe & la perte continuelle que les faiſceaux avoient ſoufferts pendant les opérations précédentes, grace à la ſupériorité de cette méthode, reçurent bientôt aſſés de force pour pouvoir être trainées de tout côté par leurs contacts: vertu très remarquable, en conſidérant le grand poids d'une double maſſe d'acier trempé de 2 pieds de longueur ſur deux pouces d'épaiſſeur & que j'eſtime équivaloir à un poids avantageuſement ſuſpendu de 300 livres au moins (*); & cette force a été conſidé-

(*) Si l'adhérence des contacts, qu'on peut regarder comme preſſés par la force magnétique vers les barres, eſt telle qu'elle réſiſte aux mouvemens de côté, & que la maſſe de 70 livres de poids ſuive celui des contacts ce ne ſera pas trop que de lui ſuppoſer aſſés de forces pour ſoutenir un poids de 300 livres & au delà appliqué perpendiculairement; car regardant la force attractive comme preſſion & le poids des barres comme la réſiſtance de la friction, qui dans les corps polis eſt tout au plus la cinquième ou ſixième partie de la preſſion, cette eſtimation, toute indéterminée qu'elle eſt, ne paroîtra point exagérée.

ſidérablement augmentée dans la ſuite, moyennant deux faiſceaux de 4 lames de deux pieds appliqués de même façon.

On conçoit facilement que l'uſage continuel des lames & barres de moindre grandeur pour aimanter les plus groſſes pièces de cette collection, n'étoit pas propre à leur faire conſerver long-temps le même dégré de force, & qu'il a falu paſſer bien de fois par les mêmes opérations, avant que de leur avoir communiqué un magnétiſme plus conſtant. Il y avoit ſurtout pluſieures pièces, dont l'inégalité de l'acier & principalement celle des poles ſe refuſoit long-temps à une diſpoſition régulière des conduits magnétiques; mais il ſeroit ſuperflu de détailler tous les différens procédés. Les méthodes que je viens de rapporter & celles que je propoſerai dans la ſuite, renferment les moyens les plus efficaces, & j'ai cru devoir les ſéparer d'un grand nombre d'autres, dont l'effet avoit été plus lent & la manipulation plus embarraſſante.

Je viens aux grandes barres. — Mr. *Euler* s'étoit amuſé pendant les opérations que je viens de détailler, à les frotter à double touche à compas avec une ſeule paire des lames de deux pieds & contre toute attente avec un ſuccès tout à fait ſurprennant. Après 80 traits ſur chaque face l'adhérence des contacts à ces lourdes maſſes commencoit à devenir très ſenſible, bien plus qu'on n'auroit dû ſe promettre de l'uſage de deux lames ſi peu proportionnées à la maſſe des barres, & cette adhérence s'augmentoit ſenſiblement à chaque nouvel effort. Cependant, comme l'effet étoit trop tardif nous paſſames à la qua-

druple touche en promenant ſur deux faces à la fois quatre paires des lames de 2 pieds, diſtribuées en deux faiſceaux & douées du plus haut dégré de magnétisme que j'avois été capable de leur communiquer. Le maniement de ces faiſceaux ſur toutes les quatre faces de ces barres les renforça jusqu'à pouvoir être trainées, même chargées du poids des barres de 18 pouces; mais en ligne droite, par les contacts.

Ayant jugé ce dégré de force ſuffiſant, pour être employé avec ſuccès à aimanter les grands fers à cheval, nous y appliquames de la manière connue une pièce de la première grandeur, avec les précautions néceſſaires à la conſervation des forces, & nous la frottames à quadruple touche, moyennant deux faiſceaux des lames de 2 pieds, que nous promenames une trentaine de fois ſur chaque face, ce qui lui donna d'abord aſſés de force pour porter un poids de 40 livres; c'eſt à dire quelques livres au de là de ſon propre poids.

Pour augmenter ce commencement de forces, il falut repaſſer par les mêmes opérations, ce qui me donna lieu de remarquer, que non-obſtant les précautions les plus ſoigneuſes que j'obſervois en appliquant & en détachant la piéce, chacune de ces opérations affoibliſſoit ſenſiblement les barres, quoique les faiſceaux dont nous les frottames, ne ſubiſſent que des diminutions très légères Avant que d'aſſigner les moyens par lesquels j'ai taché d'éviter le mauvais effet de cet affoibliſſement, je crois devoir ajouter quelques mots ſur ſon origine. Pour cet effet je remarque, qu'indépendamment de la différente trempe, qui dans

dans les barres n'avoit pas même aſſés pénétré, & de l'inégalité des poles, qui avoit déjà été nuiſible à la perfection de leur magnétiſme, il eſt d'autres défauts dans la méthode même. Car le fluide magnétique, qui tourbillonnoit avec la plus grande rapidité dans les deux barres & leurs contacts, trouvant tout d'un coup au lieu du dernier, qui lui avoit offert un paſſage libre, une maſſe d'acier plus dure & dont les pores n'avoient pas encore été diſpoſés à le recevoir, doit être arrêté & diſperſé pour la plus grande partie à l'entrée du fer à cheval, & le reſte ne pourra le traverſer librement que lorsque les canaux en auront été débouchés par l'activité de la matière qui ſort des faiſceaux frottans. Dès que la circulation eſt rétablie les derniers ne dechargent plus rien, ne faiſant que conduire la portion qui s'élance d'une barre pour entrer dans l'autre par le fer à cheval; & dès que celui-ci eſt détaché des barres, il emporte la portion qui y circuloit lors de la ſéparation & qui forme enſuite le tourbillon particulier de la pièce détachée. L'affoibliſſement qui découle de toutes ces ſources differentes doit être redreſſé enſuite à chaque nouvelle opération.

Pour éviter tant ſoit peu la perte des forces qui réſultoit de ces procédés, je ne détachai le contact entièrement des barres, qu'après avoir diſpoſé par quelques traits les conduits du fer à cheval à recevoir le fluide qui devoit les traverſer; & pour en augmenter l'affluence, je plaçai ſur les grandes barres A B & C D une autre paire de celles de 18 pouces, *a b* & *c d* (Fig. 12.), dont je dirigeai le courant dans les inferieures moyennant des morceaux de fer doux *m*, *n*, inclinés ſur leurs faces. Par

cette précaution j'obtins 1°.) que toute la portion du fluide magnétique, qui, ne trouvant pas d'abord entrée dans le fer à cheval F, ſe diſperſoit auparavant ou s'arrétoit du moins à l'embouchure de ſes pores, pouvoit traverſer maintenant le contact couché ſur les faces des barres & continuer l'ancien cours, jusqu'à ce que je puſſe le diriger ſans crainte dans le fer à cheval; 2°.) que la diminution qui ſe faiſoit encore malgré ces précautions, ſe réparoit par le tourbillon des barres ſupérieures. De cette façon j'augmentai la vertu magnétique de la pièce jusqu'à lui faire porter 80 livres.

Pendant que je travaillois ainſi à aimanter cette pièce & quelques autres de moindre maſſe, Mr. *Euler* étoit parvenu à communiquer à un autre fer à cheval de la même grandeur un dégré de magnétiſme ſupérieur à celui que j'avois été en état de produire, & d'autant plus remarquable, que la méthode dont il s'étoit ſervi ſembloit avoir tout au plus le mérite de l'aiſance & ne promettre qu'un ſuccès très médiocre. Il le mit ſimplement ſur une table couverte de feutre pour éviter tout ébranlement nuiſible, & le frotta, garni de ſon ſupport, avec une paire des barreaux de 12 pouces, de la manière que j'ai appellée ci-deſſus double touche à compas. Par cette opération, continuée ſur l'autre face & réiterée enſuite à diverſes repriſes, la pièce acquit une force magnétique telle, qu'ayant été ſuſpendue quelques jours & chargée de quelques autres pièces d'acier, dont le poids pouvoit monter à 110 livres, elle les a portées ſans la moindre altération. Je ne doute pas, que ſi j'avois eu la facilité de la tenir ſuſpendue plus long-temps & d'augmenter peu à peu le

ſe poids qu'elle à porté d'abord après le frottement, le tourbillon ne s'en fût affermi de plus en plus & qu'elle n'eût été en état de porter le double de celui que je viens d'aſſigner, & peut-être le triple, après l'avoir retouchée aſſés ſouvent pour pénétrer ſuffiſamment toute ſon épaiſſeur & diſpoſer tous ſes pores également en conformité du magnétiſme. — Quel que ſoit d'ailleurs le poids que des pièces de cette maſſe auroient du ſoutenir & auroient ſoutenu ſans doute après quelques corrections dans leur figure & dans la forme & la juſteſſe de leurs poles: ce qu'il y a de ſûr c'eſt que cette méthode d'aimanter les fers à cheval, que nous avons toujours employée depuis avec un ſuccès également décidé, eſt tout au moins auſſi efficace que l'autre, où l'on applique la pièce à des barres de grandeur proportionnée. Outre cela elle à l'avantage d'être plus ſimple & moins pénible; car elle n'exige que le maniement d'une paire de barres de 12 à 15 pouces, douées d'un principe de vertu magnétique, qu'on peut mener facilement au plus haut dégré de force poſſible, en renforçant une paire par l'autre, ſi l'on veut s'en procurer quatre de même grandeur. Il eſt vrai qu'il faut répéter ſouvent ce travail dans la ſuite, pour réparer les pertes continuelles qui réſultent du fréquent uſage de ces barres, tant pour les mettre en état de pénétrer bien avant dans la pièce à aimanter & d'y ranger une plus grande quantité de pores conformement au magnétiſme; auſſi bien que pour augmenter de plus en plus la quantité du fluide qui doit les parcourir. Mais de l'autre côté il n'y a pas moins de fatigue à renforcer les grandes barres où l'on a appliqué la pièce, lesquelles, ſujettes comme j'ai fait voir, à des affoibliſſemens conſidérables,

rables, doivent pourtant être entretenues dans un degré éminent de force, ainſi que les lames ou faiſceaux, dont on fait uſage pour faciliter le paſſage au courant magnétique. Si l'on ajoute à tout cela, l'embarras de retourner les barres auſſi ſouvent qu'on doit préſenter une autre face au frottement, le détachement de la pièce, & les altérations du tourbillon, qu'il eſt impoſſible d'éluder entièrement, malgré toutes les précautions imaginables, on ſentira tout le prix de cette autre méthode qui, exempte de tous ces inconveniens, n'eſt ni moins expéditive ni moins efficace.

*** *** ***

Après le détail des principaux moyens employés pour communiquer la vertu magnétique à cette collection de pièces d'acier, moyennant une paire de petites lames extrêmement affoiblies par le temps & le peu de ſoin qu'on avoit pris d'y entretenir le tourbillon magnétique, au point qu'elles n'étoient pas même capables de porter le poids de trois onces: je vais ajouter encore quelques remarques & précautions générales, déduites d'un grand nombre d'expériences. Elles pourront intéreſſer ceux qui voudront s'occuper à faire des aimans artificiels, & elles ſont d'autant plus importantes, que de leur obſervation plus ou moins ſoigneuſe dépend ſouvent le bon ou le mauvais ſuccès d'un travail long & pénible. Au reſte, en raſſemblant ici ces règles générales, j'aurai l'occaſion d'ajouter encore l'explication de pluſieurs phénomènes & d'éclaircir pluſieurs faits propres à en faire voir l'importance.

I. Com-

I. Comme dans la manoeuvre de rendre l'acier magnétique tout revient à diſpoſer ſes pores enſorte qu'ils forment des tuyaux contigus, parallèles & capables de recevoir le fluide magnétique, de le propager & d'en perpétuer le mouvement, il faut apporter la dernière attention dans le choix de l'acier qu'on veut aimanter. Il doit être d'un grain égal & petit, homogène & ſans noeuds, pour préſenter au fluide beaucoup de conduits égaux & non-interrompus d'un bout de la pièce jusqu'à l'autre. Il doit être d'une bonne trempe, pour que ſes pores conſervent plus long-temps la diſpoſition une fois reçue, & puiſſent mieux réſiſter au changement de direction, auquel eſt expoſé le fer & l'acier plus mou. On n'a qu'à aimanter avec le même aiman & de la même manière deux pièces de maſſe & volume égal pour ſe convaincre combien, toutes choſes d'ailleurs égales, la différence de l'acier influe ſur la ſuſceptibilité de la vertu magnétique.

II. Les pièces ne doivent être ni trop longues ni trop courtes par rapport à leur épaiſſeur. Si elles ſont trop longues, la route que la matière magnétique, ſortant d'un pole pour rentrer dans l'autre, doit ſuivre, & qui eſt chargée de l'éther mêlé avec l'air groſſier, oppoſe plus d'obſtacles à la continuation de ſon mouvement; le courant en ſera trop répandu, moins fourni & ſa viteſſe extrèmement ralentie. Si elles ſont trop courtes, le fluide *m m* (Fig. 13.), s'inſinuant en A dans les conduits de la barre & ſortant en B, où il rencontre la partie plus groſſière de l'éther, qui le repouſſe & réfléchit pour ainſi dire, en ſera jetté trop loin au de là du pole A, pour s'unir facilement à la matière affluente & pour re-

 tour-

tourner vers les orifices des conduits, ce qui empêche la perpétuité du mouvement & la formation du tourbillon. Si elles ſont trop minces, le nombre des conduits eſt trop petit pour recevoir un courant capable de réſiſter aux obſtacles, qui s'oppoſent à ſon mouvement dans l'eſpace externe qu'il doit balayer; & trop d'épaiſſeur nuit à la direction droite, par la difficulté d'en arranger les conduits les plus intimes, ce qui donne lieu à des détours incompatibles avec la formation des tourbillons (*).

III. Toutes les pièces doivent être polies ſoigneuſement; & il eſt ſurtout de la dernière importance de les faire travailler exactement aux extrémités, enſorte que les bouts touchent, en autant de points qu'il eſt poſſible, les contacts ou ſupports de fer doux, qu'on y applique pour entretenir le tourbillon. Des inégalités conſidérables tant ſur les faces que principalement aux poles peuvent non ſeulement occaſionner des détours très nuiſibles à la circulation; mais encore le fluide, étant obligé alors de traverſer en partie des interſtices remplis d'éther & d'air groſſier, en ſera diſperſé & ſenſiblement ralenti dans ſon mouvement, dont la viteſſe paroît être une des principales ſources de la vertu magnétique. — Pour pouvoir ajuſter plus aiſément ces poles, il ſeroit bon de les faire conſtamment de fer doux, en ſoudant aux extrémités de chaque pièce des morceaux de fer de 4 à 6 lignes de longueur. On obtiendroit par là un autre avantage: celui de pouvoir gliſſer les barres, dont on ſe ſert

(*) J'ai fait faire des barres quarrées ſuivant des dimenſions différentes, & je crois avoir obſervé que le meilleur rapport de la longueur à l'épaiſſeur eſt comme 15 ou 16 à 1.

ſert pour aimanter, le long de l'acier d'un bout à l'autre; au lieu que dans les pièces de pur acier, obligé comme on eſt de s'arrêter à quelque diſtance des poles, de crainte de heurter les contacts, on laiſſe à l'activité du fluide le ſoin de ſe frayer un paſſage par ce petit eſpace pour entrer dans le ſupport, ce qu'il ſera plus aiſément par les pores plus ſouples du fer.

IV. Il faut avoir ſoin que pendant toute l'opération les contacts ou ſupports ne ſe détachent jamais des poles de la pièce: un inſtant de ſéparation eſt capable d'anéantir tout l'effet du travail précedent. Une grande partie du fluide magnétique allant ſe diſperſer alors dans l'air avec cette activité qu'on lui connoit, il eſt naturel, que la circulation troublée par cette interruption, ne puiſſe ſe remettre que par une opération réitirée, ou bien par le concours du tourbillon général, ſi on en veut attendre l'effet toujours lent & tardif. Pour éviter une telle ſéparation & en général toute altération de la figure rectangulaire des barres, ou de la diſpoſition primitive de quelque autre pièce que ce ſoit, il ſera bon de la fixer avec ſes contacts par des clous ou par des crampons de bois. — On croira que je m'arrète à des minucies; mais, ne pouvant mettre une infinité d'opérations inutiles, qui retardèrent au commencement l'effet de mon travail, que ſur le compte de ces petits dérangemens que je négligeois alors, je crois devoir inſiſter ſur l'importance de ces précautions.

V. Il ne faut s'arrêter ſur la première barre qu'on veut aimanter, qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour

en ouvrir les pores par quelques traits & les arranger conformement au magnétiſme, paſſant tout de ſuite ſur l'autre, pour donner iſſue au fluide qui vient s'y décharger de la première. Un ſéjour trop long ſur celle-ci affoibliroit le faiſceau ſans être utile à la barre, qui, toute ſurchargée qu'elle en ſeroit, ne ſauroit conduire la matière que juſqu'à l'entrée des pores de l'autre barre, où les canaux, n'étant pas encore débouchés, lui refuſeront le paſſage & l'obligeront ou à ſe frayer une autre route ou à ſe diſperſer dans l'air.

VI. Il ſera bon de tourner d'abord la barre qu'on a quittée pour paſſer ſur l'autre; de cette façon le courant qu'on y va exciter diſpoſera les conduits de la première en ſorte que l'effet, quand on y reviendra pour frotter la face tournée, ſera plus efficace. Un autre avantage qui réſulte de ce procédé, c'eſt que n'ayant à retourner qu'une ſeule barre à la fois, on peut le faire ſans ôter le faiſceau pendant toute l'opération; circonſtance qui eſt très favorable à la conſervation des forces; car on ſentira bien que les faiſceaux, par le déplacement continuel de leurs poles aux barres & des barres aux contacts, doivent perdre à la fin conſidérablement de leur magnétiſme, quelque ſoin qu'on donne d'ailleurs à ſa conſervation.

VII. Pour mieux éviter cette perte & en général toute altération des tourbillons, tant dans les pièces qu'on a aimantées que dans celles dont on s'eſt ſervi pour cet effet, il y a encore deux autres précautions à prendre, ſavoir: 1° de ne détacher les dernières que ſur l'équateur

teur de la barre, où l'attraction eſt toujours moindre que vers les poles, & 2° de ne jamais faire cette ſéparation qu'après avoir remis le contact.

VIII. Il ne faut jamais précipiter le mouvement des faiſceaux ſur les barres, pour donner le temps à la matière magnétique, qui ſort des premiers, de diſpoſer aſſés de conduits dans celle-ci pour la recevoir. Car j'ai conſtamment obſervé, qu'un mouvement trop vif étoit également préjudiciable tant aux pièces frottées qu'aux faiſceaux frottans & que trop de violence retardoit beaucoup l'effet des opérations.

IX. C'eſt une erreur aſſés commune, de croire qu'avec des barres de maſſe & de force conſidérable on puiſſe facilement communiquer à de petites pièces le plus haut dégré de magnétiſme dont elles ſont ſuſceptibles, pendant qu'il ſeroit impoſſible de ſe ſervir de lames ou barreaux de moindre force, pour aimanter avec ſuccès des pièces de maſſe conſidérable. J'ai trouvé ce ſentiment dans pluſieurs Auteurs, qui ont écrit ſur les aimans artificiels & il paroît aſſés fondé au prémier coup d'œil; cependant je doute qu'ils s'en ſoyent aſſurés par des expériences, vu qu'un grand nombre de celles que nous avons été à portée de faire, nous a fait voir tout le contraire.

Nous avons conſtamment bien réuſſi à aimanter & même à renforcer à un dégré très éminent les plus grandes pièces moyennant des lames ou barreaux de force & de maſſe très médiocre. Témoin la méthode de Mr. *Euler*, employée pour aimanter les grands fers à cheval &

 même

même des barres de 24 & 30 pouces de longueur, pendant qu'il m'a été impoſſible de renforcer, moyennant des pièces douées d'un haut dégré de magnétiſme, de petites lames au même point de force que j'avois été capable de produire, en faiſant uſage de leurs compagnes ou de plus petites encore en maſſe & en vertu. J'ai ſouvent eſſayé par exemple de renforcer les lames de 12 pouces moyennant les barres de même longueur; or quoiqu'il n'y eût pas là une extrême diſproportion, le ſuccès n'a jamais égalé celui que produiſirent des pièces de moindre force. Souvent même, au lieu de recevoir de l'augmentation, elles s'affoiblirent à vue d'œuil, & cela d'autant plus que les barres étoient douées d'un dégré éminent de magnétiſme.

Mais comment expliquer ce Paradoxe apparent? Je crois qu'en bien reflêchiſſant ſur la nature de l'aiman & en comparant ce phénomène avec pluſieurs autres dont on a donné des explications, qui par leur merveilleux accord n'admettent presque plus de doute, on ne ſera pas long-temps à en déviner la cauſe. Je conçois une lame A B (Fig. 14.) déjà douée d'un principe de magnétiſme, qu'on veut augmenter moyennant d'autres lames ou barres conſidérablement plus grandes C D & E F aimantées au plus haut dégré. Dès qu'elles ſeront appliquées ſur la lame à frotter, le fluide, s'élancant avec impétuoſité & en grande abondance dans celle-ci, la traverſera dans toute ſon épaiſſeur; le courant qui la parcourt étant trop foible pour l'entrainer avec lui & pour en changer ſubitement la direction. Par là l'ancienne circulation ſe trouble & ne peut ſe remettre qu'après la

ceſſation

ceſſation entière ou l'affoibliſſement de cette violente ef-fuſion, par l'activité du tourbillon général, ou enfin par une nouvelle opération, moyennant des faiſceaux de moindre force. Si la lame à aimanter eſt entièrement deſtituée de forces, on ne lui en communiquera pas de conſidérables & proportionnées à ſa figure en ſe ſervant de faiſceaux puiſſamment aimantés; car le courant qui en ſort, trouvera les mêmes difficultés à ſe tourner d'abord après ſon entrée pour parcourir de toute ſa longueur la lame ſoumiſe à ſon action, & par conſéquent il ne pourra en diſpoſer les pores conformément au magnétiſme, qu'après s'être affoibli au point de reſiſter moins à cette direction, ce qui dans cette manœuvre ne tardera pas d'arriver en peu d'inſtans.

Il y a au contraire dans l'uſage des petites barres & des faiſceaux, même foiblement aimantés, un afflux continuel, quoique moins fourni, de fluide magnétique, qui s'unit facilement au tourbillon des plus grandes barres, ſuit avec facilité ſa direction & l'augmente, lentement à la vérité, mais avec un ſuccès indubitable. Mr. *Euler*, dont l'activité & l'application continuelle doit étonner tous ceux, qui ont l'occaſion d'en etre comme moi temoins oculaires, s'eſt ſouvent amuſé, lorsqu'il a voulu ſe délaſſer de ſes profondes méditations, à renforcer de cette manière des barres de 18, de 24 & même de 30 pouces de longueur, moyennant des barreaux de 12 pouces, dont il continua de les frotter avec ſuccès jusqu'au dernier dégré d'affoibliſſement: elles en reprennoient leur ancienne vigueur. Mais ici il faut avoir ſoin de promener les barreaux frottans ſur toute la largeur de la pièce

à

à aimanter, afin de diſpoſer par-tout les conduits également en conformité du magnétiſme & d'éviter qu'il ne ſe puiſſe faire nulle-part des détours nuiſibles à la viteſſe & à la direction du courant.

X. Enſuite en aimantant des pièces d'acier de maſſe conſidérable moyennant des faiſceaux de groſſeur & de force médiocre, nous avons ſouvent rencontré des endroits, où le faiſceau gliſſoit avec plus de facilité que ſur les autres; phénomène qui n'aura pas lieu ſi l'acier eſt d'un grain uni & d'une trempe égale, mais qui fait voir qu'on doit ſoigneuſement corriger ce défaut partout, où il ſe trouve. Pour cet effet il faut ſéjourner plus longtemps ſur ces endroits que partout ailleurs, & y promener les faiſceaux, jusqu'à ce que l'adhérence en ſoit la même ſur toute la ſurface. Par ce moyen, malgré les pailles ou les nœuds de l'acier, on diſpoſera les conduits magnétiques ſuivant des directions parallèles le long de la pièce. Le fluide, toujours enclin à quitter la direction là où il rencontre des obſtacles, & à ſe frayer ſon chemin par les pores les plus aiſés à déboucher, ne ſera pas obligé à faire des détours, qui retardent non ſeulement l'effet du travail, mais qui ſouvent encore ſont la ſeule ſource d'un affoibliſſement qu'on aime à attribuer à une perte du fluide même, plutôt qu'à cette altération de ſon cours & à la rétardation de ſon mouvement qui en eſt la ſuite. J'ai renforcé des pièces conſidérablement affoiblies, en ne gliſſant les faiſceaux que ſur des endroits ſemblables, où j'avois remarqué l'attraction moindre que ſur le reſte de la ſurface, & elles en reprirent leur force primi-

primitive, qui après quelques réitérations du même procéde devint de plus en plus inaltérable.

XI. A l'égard des fers à cheval & de la manière de leur communiquer la vertu magnétique, il n'y a pas de préceptes particuliers qui ne ſoyent renfermés dans ceux que je viens de rapporter ici. J'obſerve ſeulement, rélativement à leur figure, qu'il ſera bon de les faire d'une ſeule lame d'épaiſſeur convenable, fabriquée au reſte ſuivant les mêmes dimenſions qu'on a coutume d'obſerver pour les lames droites, & dont j'ai parlé dans la ſeconde remarque, à cette différence près: qu'il faut leur donner plus de largeur & d'épaiſſeur vers le milieu, les atténuer inſenſiblement vers les poles & appointir enfin ceux-ci juſqu'à une ligne ou deux d'épaiſſeur, pour obliger le fluide à ſe comprimer en paſſant par cette petite ſurface, & à ſe répandre enſuite avec plus d'activité dans le ſupport, ce qui en augmente conſidérablement la force. Car on ſait par la diſpoſition de la limaille de fer autour d'un aiman, que la matière magnetique eſt extrêmement ramaſſée & preſſée de toutes parts à ſon entrée & à ſa ſortie d'un aiman. La limaille qui s'arrange aux deux poles en une infinité de filets, qui s'écartent & ſe déſuniſſent également à l'un & l'autre, nous fait voir que cet etat comprimé ſubſiſte dans tout l'intérieur de l'aiman, & qu'il ceſſe d'abord au dehors par les obſtacles qui s'oppoſent au mouvement du fluide, lorsqu'il traverſe l'eſpace extérieur rempli d'air. On voit de plus que ces filets ſont plus ramaſſés, ſelon que l'aiman eſt plus fort, & plus répandus ſelon qu'il eſt plus foible. On peut donc regarder ce reſſerrement de la matière comme une

des principales ſources de la vertu magnétique & on s'appercevra mieux encore de ſon influence en comparant les tourbillons particuliers avec le tourbillon général, dont les effets ſont infiniment moins ſenſibles, par la ſeule raiſon, que ſa matière, ayant à traverſer un eſpace trop étendu & à vaincre trop d'obſtacles pour arriver d'un pole à l'autre, eſt beaucoup plus raréfiée & moins abondante que celle des tourbillons particuliers des aimans. Plus donc que par l'aiguiſement des poles on a augmenté ce reſerrement, plus ſera ſenſible la force attractive & portative de la pièce (*), & cette même concentration des forces doit avoir un ſuccès également heureux aux barres mêmes.

J'ai fait faire ſuivant ces idées deux pièces, dont l'une n'avoit que 11 onces & l'autre deux livres de poids, qui d'abord après la première opération ont porté l'une dix livres & l'autre 25 livres de poids, pendant que les autres pièces de largeur & épaiſſeur d'égale n'ont jamais été capables de ſoûtenir au delà de 6 fois leur propre poids. D'ailleurs les deux fers à cheval, dont je viens de parler, pourront facilement être renforcés: car je n'ai fait uſage pour les aimanter l'un & l'autre que d'une paire de mes barres de 11 pouces affoiblies de propos délibéré

(*) Cependant il n'y a point de doute que cet aiguiſement n'ait auſſi ſes bornes, au delà deſquelles, loin d'être avantageux, il pouroit devenir nuiſible. Mais comme je n'ai par encore raſſemblé aſſés de faits pour déterminer la forme de la taille & celle des ſupports, qui eſt également eſſentielle, je me contente d'avoir vu la validité de cette ancienne obſervation ſe confirmer par mes expériences.

délibéré, ſans les appliquer à aucune barre; & quoique l'acier du dernier ne ſoit pas de la meilleure eſpèce, malgré ſes fentes & crevaſſes j'en ai pu augmenter le poids juſqu'a 33 livres; & l'autre en porte encore 16 actuellement, c'eſt à dire 23 fois ſon propre poids. Au reſte je ſuis perſuadé qu'en les retouchant l'un & l'autre avec les mêmes precautions que je viens de rapporter, moyennant des barres tant ſoit peu plus fortes & en augmentant enſuite inſenſiblement le poids, je pourrai les amener juſqu'à porter l'un au delà de 20 & l'autre au delà de 40 livres; & ils conſerveront cette force beaucoup mieux, que s'ils étoient compoſés de pluſieures lames, comme on les fait ordinairement, en les reuniſſant par une armure particulière; & alors ces pièces ſurpaſſeront en force, rélativement à leur maſſe, tout ce qu'on a vu juſqu'à préſent de plus exquis en aimans artificiels.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE.

Obſervations ſur l'Electricité naturelle par le moyen d'un Cerf-volant: adreſſées à l'Académie, par S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, Envoyé extraordinaire auprès de Leurs Hautes Puiſſances à la Haye.

Messieurs!

Les Phyſiciens n'ont gueres été d'accord jusqu'ici ſur les effets du *Cerf-volant* électrique. Des hommes très célébres & très ingénieux, avoient tenté vainement d'eſſayer cette voye pour en tirer de l'électricité, & ils en avoient conclu que cet Inſtrument n'y étoit pas propre. D'autres plus heureux, varioient ſur la nature de l'électricité qu'il donnoit: les uns la croyoient toujours *poſitive*, les autres toujours *négative*.

Pour concilier ces différens avis, j'ai entrepris de vérifier ce qui pouvoit y avoir donné lieu, & de ſavoir ce qui en eſt. J'y ai été plus heureux que je n'aurois oſé l'eſperer.

Une ſeule perſonne a bien de la peine à manier cet Inſtrument. D'ailleurs il y a dans ces ſortes d'expérien-

riences, des momens, des inſtans même à ſaiſir, qui une fois échappés, ne ſe retrouvent plus ſi-tôt. Il me falloit donc un Compagnon, & je le trouvai dans Mr. *Dentan*, qui joint à une paſſion vive pour les Sciences, une ſagacité, une adreſſe & une intelligence extrèmes dans les expériences & les obſervations. Il ne m'a donc pas ſeulement ſecondé, mais il a vérifié & continué la plûpart des obſervations dont je vais avoir l'honneur, Meſſieurs, de vous rendre compte ici. Je ſaiſis au reſte avec plaiſir cette occaſion de rendre juſtice à ſes mérites & de lui témoigner publiquement le cas infini que j'en fais.

Quelque connu que vous ſoit, Meſſieurs, un Cerf-volant électrique, la commodité de celui qui nous a ſervi, m'engage à vous donner ici, & avant tout, la deſcription & le deſſein du mien dans l'inſtant de ſon élévation & de nos expériences. Vous jugerez par là, que s'il a manqué entre des mains bien plus habiles que les miennes, la faute n'en étoit aſſûrément qu'à la conſtruction de l'Inſtrument. Il y falloit indiſpenſablement une communication non-interrompue, par le moyen des fils-d'archal entre les Pointes qui ſont au dos du Cerf-volant, ſa corde & le Conducteur iſolé auquel on charge les Bouteilles. Mais il n'exige pas moins eſſentiellement d'être parfaitement iſolé. Nous avons rigoureuſement obſervé ces loix, & l'effet a toujours répondu à notre attente.

Deſcription
du Cerf-volant électrique élevé.

A. Le deſſus du *Cerf-volant* élevé.

2. Pointes métalliques.

3. Fil-d'archal qui établit une communication ſuivie entre les pointes, la queue & la corde du Cerf-volant.

B. La queue du Cerf-volant.

C. La corde, tramée ſur du fil-d'archal.

D. Dévidoir pour la corde.

E. Pieds du dévidoir, dont une partie

5. eſt de bois ſec pour iſoler le Cerf-volant.

4. Couvercles de cuivre, pour empêcher le bois ſec des pieds *E* d'être mouillé par la pluye.

6. Eſpece d'Électromètre (comme celui de *Lane*) qu'on viſſe à un des pieds, afin de recevoir la ſurcharge de l'électricité, qui par le moyen du fil-d'archal

7. s'en iroit dans le Canal *N*.

NB. On voit par cette précaution, que mon Cerf-volant eſt conſtruit de façon, qu'il n'y a aucun danger à le manier, dût-il recevoir du nuage une doſe prodigieuſe d'électricité; la ſurcharge s'en va dans l'eau & ne peut jamais parvenir juſqu'à l'obſervateur.

K. Cabinet ou Belvedere où ſe font les expériences.

H. Table ſur laquelle on tient l'appareil électrique.

G. Con-

G. Conducteur iſolé, auquel, (lorsqu'on *y* attache un fil-d'archal 8. dont l'autre bout eſt joint en *u* à la corde *C*) on peut charger les bouteilles & faire toutes ſortes d'expériences.

O. Fenêtre au travers de laquelle on fait paſſer le même fil-d'archal 8.

P. Terraſſe, où ſont affermis les pieds des dévidoirs.

x. Manivelle du dévidoir *D.*

L. Autre dévidoir à corde de ſoye. Lorsqu'on veut ramaſſer le Cerf-volant, & qu'on n'oſe pas le toucher, de crainte que l'électricité ne faſſe du mal, on le fait par le moyen de ce ſecond dévidoir. Sa corde de ſoye *M* eſt attachée au premier dévidoir *D*. En tournant la manivelle *y* on fait tourner le dévidoir *D* à contre-ſens de ce qu'on a fait pour l'élévation du Cerf volant.

NB. Cette ſeconde précaution met le comble à la ſûreté qu'il y a à manier mon Cerf-volant.

Expériences.

Nous avons élevé notre Cerf-volant d'un des lieux les plus élevés de ce Pays, d'une petite maiſonnette ſituée au ſommet d'une Dune & apartenante à Mr. le Greffier *Fagel*. Ce digne Miniſtre, dont l'amour pour les Arts & les Sciences eſt connu de toute l'Europe, a volontiers conſenti de changer ce Belvedere en un Obſervatoire de Phyſique. C'eſt le 4. Juin, 1775 que nous avons commencé nos expériences: nous les avons continuées jusqu'au commencement de cette année-ci. (1778.)

En

En élevant le Cerf-volant par toutes ſortes de vents, en differentes ſaiſons & à différentes heures; jamais nous n'avons pu achever notre expérience ſans trouver des ſignes évidens d'électricité, tantôt forte, tantôt foible, mais toujours ſenſible; dans les tems ſecs & chauds, comme dans les tems humides. De nuit comme de jour, nous avons vu briller l'étincelle électrique, nous avons chargé la bouteille. Voici les remarques principales qui réſultent de cette ſuite d'expériences.

1°. Par la quantité de corde lachée & l'inclinaiſon qu'elle prenoit en s'élevant, nous avons connu, à peu-près, la hauteur à la quelle l'électricité commençoit à être ſenſible. Je dis à peu-près; car dans les grandes élevations, la corde fait une courbe dont il eſt difficile de tenir compte. Cette hauteur eſt très indéterminée, & nous a paru dépendre de la plus ou moins grande ſechereſſe de l'Air inférieur. Dans les tems humides, quand le bas de l'Atmosphère étoit rempli de vapeurs, il falloit élever le Cerf-volant plus haut pour obtenir des ſignes électriques. Nous en avons rarement obtenu à moins de l'avoir élevé de 150 à 200 pieds au-deſſus de la Dune, qui l'eſt elle même de 70 à 80 au-deſſus du niveau de la Mer.

2°. La nature de l'électricité varie auſſi. Cependant elle eſt d'ordinaire *poſitive*. Si l'on pouvoit hazarder quelque regle à cet égard, il ſemble qu'elle eſt *poſitive* dans les tems calmes, & qu'elle ſe trouve plus ſouvent *négative* à l'approche des orages. À cet

cet égard nous devons avouer que pendant longtems nous n'avons employé qu'une méthode incertaine pour déterminer la nature de l'électricité. Il importe beaucoup, pour s'en aſſûrer, de faire attention aux premiers mouvemens des balles de l'Electrometre, & à la diſtance à la quelle on les aproche du Conducteur. La Lanterne de Beccaria dont nous avons eſſayé de faire uſage, nous a peu ſervi, & ſervira peu, j'imagine, excepté dans les tems d'orage. L'Electrometre le plus ſimple eſt le meilleur: Celui que Mr. *Cavallo* a tout nouvellement imaginé, eſt excellent pour ces expériences. Ce ſont deux trés petites balles de liege, attachées, par le moyen des Fils-d'archal à une plaque d'ivoire qui paſſe dans le goulot d'une petite phiole de verre, dont le deſſus eſt un couvercle de métal. Il eſt de la plus grande ſenſibilité, & prend aiſément l'électricité dès qu'il eſt à portée d'elle. En en aprochant enſuite un morceau de cire d'Eſpagne frottée contre du drap, on reconnoit ſans difficulté l'espece d'électricité dont les balles ſe feront impregnées.

3°. Nous croyons que l'analogie qu'on imagine entre les Aurores boréales & l'electricité, n'eſt pas encore auſſi aſſurée qu'on le croit: nos experiences ne nous ont rien donné de régulier à cet égard. Nous ſavons que les Aurores boréales affoient l'Aiguille magnetique; mais nous n'avons pas remarqué qu'elles influaſſent ſur les ſignes d'electricité que nous donnoit la Machine.

 4°. Le

4°. Le Cerf-volant, qui nous a ſervi à nous aſſûrer de cette permanence dans l'etat électrique de l'Atmoſphere, eſt préférable par cette raiſon aux autres Inſtrumens employés à cet effet: c'eſt qu'il va plus haut que les Conducteurs pour ſoutirer le fluide électrique. Mais il a les inconveniens ſuivans. 1°. Qu'il ne peut être élevé que rarement & avec des vents un peu forts. Quoique dans un Païs où les vents regnent & ſoufflent forcément & fréquemment, nous avons fait un grand nombre d'eſſais inutiles pour l'élever. 2°. Que par la même cauſe il ne ſert pas dans les cas les plus intéreſſans. Nous l'avions élevé, p. e., à l'aproche des orages: ce calme qui les précede immédiatement, l'abbattoit, & il y avoit enſuite trop de danger, ou il étoit trop tard pour l'elever de nouveau. 3°. Il manque auſſi ſouvent par une raiſon contraire. Les vents violens viennent d'ordinaire par bouffées, tiraillent la corde & la caſſent, à moins qu'on ne veuille la faire d'une groſſeur embaraſſante, & qui par ſa péſanteur aporteroit un obſtacle à l'élevation du Cerf-volant.

5°. J'avois dit, que dans tout tems nous avons trouvé des ſignes d'électricité. Voici les modifications. 1°. Si la pluie venoit à tomber pendant que le Cerf-volant étoit élevé, l'electricité ceſſoit & ne ſe remontroit enſuite qu'au bout de quelques minutes aprés la ceſſation de la pluie. 2°. Si les nuages étoient répandus ça & là dans l'Atmoſphere, l'électricité augmentoit ſenſiblement dès que l'un

l'un d'eux venoit à paſſer au deſſus du Cerf-volant, & diminuoit après ſon paſſage. 5°. Les accès du vent élevent & abaiſſent alternativement le Cerf-volant. L'électricité ceſſoit quelquefois dans les abaiſſemens; toujours elle devenoit plus foible, & ſe remontroit ou augmentoit dans les élevations. Le carillon électrique, l'électrometre, la ſenſation des étincelles & leur vivacité, conſtatoient ces états d'augmentation ou de diminution de l'électricité.

6°. La ſenſation que produit une étincelle électrique obtenue par le Cerf-volant, mérite d'être obſervée. Cette étincelle eſt petite dans les tems ordinaires; mais n'eut-elle qu'une ligne de longueur, elle fait une impreſſion ſemblable à celle d'une commotion & pique la main. Ce phenomene, dont nous nous ſommes aſſurés cent fois ſur nous mêmes & ſur d'autres, joint à ce que je viens de dire des oſcillations électriques, correſpondantes à l'élevation ou la ſechereſſe, confirment l'explication que j'ai donnée de l'électricité naturelle; en la conſidérant comme une commotion électrique produite à l'aide d'une couche d'air intermediaire & iſolante.

7°. Nous avons eſſayé de charger une batterie de 34 bouteilles avec le Cerf-volant. Mais dans les tems ordinaires on réuſſit très difficilement, à cauſe des ces oſcillations ou variations électriques: la batterie ſe trouvant tantôt chargée, tantôt preſque

 dechar-

déchargée. Et dans le tems d'orage, elle eſt au moins inutile.

8°. Pour conclure, je dois vous faire remarquer, Meſſieurs, que le Païs où nous avons fait ces expériences, eſt un païs bas, toujours humide; dont l'air eſt ſans ceſſe rempli de vapeurs, & qui au coucher du Soleil (tems au quel tombent quelques-unes de nos expériences) l'eſt d'ordinaire d'un brouillard épais. Dans des païs très élevés, on doit vraiſemblablement s'attendre à des phénomenes bien plus intéréſſants.

J'ai l'honneur d'être avec l'attachement le plus vrai, l'eſtime la plus parfaite & la conſidération la plus diſtinguée,

MESSIEURS,

Votre très humble & très obeiſſant Serviteur. *Dimitri Prince de Gallitzin.*

A la Haye ce 25 Sept. 1778.

MECHA-

MECHANIQUE.

Jugement de Meſſieurs les Commiſſaires nommés par l'Académie pour examiner le modele d'un pont de bois à conſtruire ſur la Néva, préſenté à l'Aſſemblée le 3 Décembre, par Mr. *Nordſtern*, Horloger de l'Académie Impériale des Beaux-Arts.

Deſcription.

Le pont que ce modele repréſente ſera porté ſur un radeau flottant enfoncé dans l'eau d'une ſagene & demie : il aura neuf arches chacune de neuf ſagenes, ou 63 pieds anglois de largeur: celle du milieu s'ouvrira en deux parties pour le paſſage des vaiſſeaux.

Le radeau ſera formé de poutres enclavées les unes dans les autres & aſſûrées par des chevilles de fer. Il portera des batteaux conſtruits en forme de piles comme celles des ponts de pierre, ſur lesquels ſera aſſis le plancher du pont: toute cette maſſe flottante & ſolide eſt conſtruite de maniere à ſe prêter facilement au gonflement de la rivière & à la violence des vents, ayant toute la ſoupleſſe néceſſaire pour n'éprouver aucun dérangement dans l'aſſemblage de ſes parties.

Ces piles ou batteaux auront par en bas la figure d'un angle aigu, & elles ſeront revetues de griffes de fer pour s'oppoſer à l'effet du courant & affoiblir le choc des glaçons. A chacun de ces angles, il y aura une caiſſe de pierres ſuſpendue à une chaine de fer, que par le moyen d'un moulinet pratiqué dans le corps de la pile, l'on descendra jusqu'au fond de la riviere. Ces caiſſes ſerviront à affermir le pont contre la force du vent & la crue des eaux: & dans les cas où un ouragan obligeroit à replier le pont contre les parapets, l'on pourra lâcher ces chaines à discretion, & les remonter à leur tenſion néceſſaire avec la plus grande facilité: un homme à chaque moulines ſuffiroit pour cette opération.

Ce pont arrêté aux deux extrémités de ſon maſſif par de fortes clavetres, aura deux chaines compoſées de poutres, de chaque côté, leſquelles nageant ſur la ſurface de l'eau ſeront attachées par un bout à la partie du milieu du pont, & de l'autre au parapet par un cabeſtan, pour prevenir toute variation: enſorte qu'il ſera facile de le replier à droite & à gauche dans les cas extraordinaires mentionnés ci-deſſus.

Il a été dit que l'arche du milieu s'ouvrira en deux parties pour le paſſage des vaiſſeaux. Ces deux trapes ſe léveront par le moyen de quatre chaines & de quatre moulinets placés dans quatre guérites ſur le milieu du pont: & pour empecher les deux parties de ſe ſeparer, il y aura ſous cette arche quatre chaines de fer en ſautoir, qu'on peut avec le ſecours des tourniquets faire descendre jusqu'au fond de la riviere pour le paſ-

ſage des vaiſſeaux. Il eſt à propos de faire obſerver que cette arche du milieu eſt abſolument libre, & que le radeau s'y termine des deux cotés.

Jugement.

I. Un pont conſtruit d'après ce modele, conſidéré en lui-même & ſans avoir égard à la force des glaces, auroit ſans doute quelques prérogatives ſur le pont ordinaire. La forme en eſt plus belle, plus réguliere, plus reſſemblante à celle d'un pont de pierre; les dépenſes en ſeroient moins conſidérables, vu que le nombre des barques, & celui des gens employés journellement à la conſervation du pont, ſeroient reduits à la moitié: quand les eaux ſont hautes, le pont ſeroit moins escarpé & plus facile à monter, les vaiſſeaux paſſeroient plus aiſément & tout le pont ſe laiſſeroit ôter & réparer avec bien moins de peines, & plus de promptitude. Il ſemble à la vérité qu'il ſeroit d'autant plus pénible de remettre le pont dans ſa premiere ſituation, après qu'il auroit été ôté; mais cette difficulté s'evanouit, par l'exemple que nous avons vu en 1775 du transport d'un Temple de la Paix conſtruit par l'Académie des Beaux-Arts ſur la Neva & répoſant ſur cinq grandes barques liées fortement enſemble, que des batteliers ont fait remonter la riviere de quelques verſtes: à quoi il faut ajouter qu'il ne ſeroit pas neceſſaire chaque année de déranger le pont, comme il paroit par les détails ſuivans.

II. Pour ce qui regarde la ſolidité de ce pont pour réſiſter à la violence des glaces, nous croyons pouvoir aſſurer qu'on y a ménagé tous les moyens connus pour

pour produire cet effet, au moins tous ceux qui peuvent être employés à un pont de bois & flottant. Ces moyens ſont:

1.) l'élargiſſement des eſpaces entre chaque paire de barques.

2.) la forte liaiſon des quatre barques apartenantes à chaque moitié du pont.

3.) la forme d'un coin qu'on a donnée à la partie de chaque barque oppoſée à la glace, & le tranchant de fer dont elles ſont armées.

4.) des cordes ou des chaines qui ſont à l'épreuve du frottement & du choc des glaces.

Il eſt probable que dans les années où à la débacle de la riviere les glaces ne ſont ni trop fortes ni trop rapides, comme il arrive quelque fois, ces moyens pourroient ſuffire pour les arrêter, ſans qu'il fût néceſſaire de ſéparer les deux parties du pont. Mais on ne ſauroit affirmer qu'ils puiſſent réſiſter à toute débacle, quelque violente qu'elle ſoit: auſſi les vues de l'Auteur même ne vont elles pas ſi loin.

Le modele eſt fait très proprement & avec beaucoup d'art: il mérite d'être conſervé.

Signé *Simon Kotelnikof.*

à St. Pétersbourg, *W. L. Krafft.*

le 10. Décembre 1778. *A. J. Lexell.*

Pierre Inohodſof.

Nicolas Fuſs.

Michel Gollovin.

Jean Albert Euler, Secrétaire & Académicien.

MÉTÉO-

METEOROLOGIE

Eté de 1778.

Suivant le nouveau *Stile*.

1.

Il neigea pour la derniere fois le 19 Avril: il recommença à neiger le 10 Octobre. L'Intervalle entre ces deux termes eſt de 174 jours.

2. Il géla pour la derniere fois le 7 Mai, Therm. $152^{d.}$. Il recommença à géler le 11 Octobre, Therm. $151^{d.}$. Cet intervalle eſt de 157 jours.

3. La Néva débacla le 18 Avril au ſoir par une température de $149^{d.}$. Les glaces du Ladoga parurent le 29 Avril, & la riviere les charia jusqu'au 2 de Mai: elle reſta enſuite libre & navigable pendant 189 jours, jusqu'au 7 Novembre, au quel jour les glaces commencerent à reparoitre par un froid de $167^{d.}$. Enfin elle fut repriſe le 13 Novembre par un froid de $162^{d.}$

4. La plus grande chaleur a été de 107 degrés le 20 Juillet à 2 heures après midi. Barom. 28. 26, c'eſt à dire $28\frac{26}{100}$ pouces de Paris. Ciel entierement ſerein, vent d'Eſt.

5. La chaleur moyenne à midi a été trouvée:

depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 128 degrés

depuis le 1er Juin jusqu'au 1er Octobre 123 ——

La chaleur moyenne au matin & au ſoir:

depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 138 degrés

depuis le 1er Juin jusqu'au 1er Octobre 134 ——

6. La chaleur à midi a été depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre, ce qui comprend un intervalle de 184 jours.

7 jours au deſſus de 110 en Juin & Juillet. (*)

25 jours entre 120 & 110 en Juin, Juillet & Août. (**)

88 jours entre 130 & 120 en Mai —— Septembre.

36 jours entre 140 & 130 en Mai, Juillet —— Octobre.

22 jours entre 150 & 140 en Mai, Septembre, Octobre.

6 jours entre 160 & 150 en Octobre.

7. La chaleur au matin & au ſoir a été pendant ce même intervalle de ſix mois:

24 jours au deſſous de 150 en Mai & Octobre.

34 jours entre 140 & 150 en Mai, Septembre & Octobre.

86 jours entre 130 & 140 en Mai —— Septembre.

40 jours entre 120 & 130 en Juin, Juillet, Août. (***)

8.

(*) le 16. 21 Juin & le 19. 20—23 Juillet.

(**) le 8 9. 10. 14. 15 17. 18. 20 Juin, le 1. 5. 14. 15. 17. 18. 24. 26 28—31 Juillet & le 2. 4 6. 8 21 Août.

(***) le 9. 10. 16. 17 18. 21 Juin, le 1—5. 10—31 Juillet & le 1. 5—8. 16. 21. Août.

8. L'Etat du Barometre depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre:
ſa plus grande élévation 28. 47 le 14 Juin au matin. (*)
ſa plus petite élévation 26. 86 le 26 Octobre au matin. (**)
la variation totale - - 1. 61.
le milieu - - - 27. 66.
la hauteur moyenne 27. 92. c. à d. $27\frac{92}{100}$ pouces de Paris.

Le Barometre s'eſt trouvé 99 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$, 67 jours au deſſus de 28, & $38\frac{1}{2}$ jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de ſix mois ou 184 jours d'eté ſoufflerent:
2. jours du Nord le 7 Mai, & le 30 Septembre.
8. jours du N-E le 3. 6. Mai, 6. 7. 8 Juil. 24 Août, & le 5. 10. Octobre.
6. jours de l'Eſt le 28. Mai, 12. 13. Juin, & le 25. 26. 27. Août.
3. jours du S-E le 4. Juin, & le 21. 22. Juillet.
8. jours du Sud le 2. 23. Juin, 1 Juil. 4. 12. 27. Sept. & le 6. 23. Octobre.
14. jours du S-Ou. le 20. 21. 30. Mai, 15. 16. 24. 27. Juil. 6. 21. Août, 5. 14. 15. Sept. & le 20. 26. Octobre.
14. jours de l'Oueſt, le 22. Mai, 5. 7. 17. 18. 29. Juin, 26. 28. 31. Juil. 12. 15. 29. Août, 25. Sept. & le 16 Octobre.

(*) Therm. 135, ciel entierement ſerein, vent de l'Eſt.
(**) Therm. 149, ciel couvert, vent fort du S-Ou.

11. jours du N-Ou. le 12. 24. 25. 26. 27. Mai, 30. Juin, 4. Juil. 2. 22. Août, 20. Sept. & le 24. Octobre.

10. Les vents très forts régnerent:
4 jours du N-E le 4. 5. Mai, 5 Juillet, & le 11 Octobre.
1 jour de l'Eſt le 10 Septembre.
1 jour du S-E le 13 Septembre.
4 jours du Sud le 23 Juil. 11. 28. Sept. & le 25 Oct.
7 jours du S-Ou. le 29 Mai, 3. 6. Juin, 23 Juil. 13 Août, 29 Sept. & le 21 Octobre.
4 jours de l'Oueſt le 1. 28 Juin, 25 Juil. & le 14 Août.
2 jours du N-Ou. le 22. 27 Juin.

11. Les autres variations de l'Atmosphere depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre ſont annotées dans la table ſuivante:

Atmosphere.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Somme
Jours entierem. ſereins	10	12	9	6	4	1	42
Jours entierem. couverts	5	2	7	5	8	20	47
Brouillards - - -	3	0	0	1	1	1	6
Pluie { médiocre -	9	5	8	7	12	9	50
Pluie { abondante -	6	4	5	10	7	4	36
Neige { médiocre -	0	0	0	0	0	12	12
Neige { abondante -	0	0	0	0	0	2	2
Grèle - - - - - -	0	0	0	0	1	0	1
Orages - - - -	2	2	2	2	0	0	8
Aurores boréales - -	0	0	0	1	8	0	9

OU-

OUVRAGES, MACHINES
ET
INVENTIONS

préſentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier ſemeſtre de l'année 1778.

Le vendredi 6 Juillet. Le Secrétaire de Conférences a préſenté de la part des Meſſieurs de l'Obſervatoire royal à Cadix, l'ouvrage intitulé: *Obſervationes aſtronomicas hechas en Cadiz en el Obſervatorio real de la compannia de cavalleros guardias-marinas. Por el capitan de navio graduado D. Vicente Toſinno de S. Miguel &c. y por D. Joſeph Varela, Capitan de Fregata de la real armado &c.* 4to 1777.

Et de la part de M. le Conſeiller de Cour & Profeſſeur *Karſten* à Halle: *Lehrbegriff der geſammten Mathematic* u. ſ. w. *zweyte Auflage I, Theil. I, Band.*

Le 9 Juillet. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. *Baſile Zouyef* élève de l'Académie étudiant à Straſbourg, qui ſoumet au Jugement de l'Académie une

Diſſertation *De balaenarum aquae projectione per ſpiracula verticalia.*

Le 13 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris, les deux derniers volumes de l'*Hiſtoire de cette Académie avec les Mémoires de Mathématiques & de Phyſique préſentés & lus en* 1773 *&* 1774: enſuite *Connoiſſance des temps pour l'année biſſextile* 1780.

Et de la part de la Societé royale des Sciences de Londres: *Tranſactions philoſophiques Vol.* 67. *Partie* 1. & 2. de même *Diſcourſe on the invention and improvements of the reflecting teleſcope, by Sir John Pringle.*

Le 17 Août. Le Secrétaire a remis une brochure de M. *G. A de Lorthe* de Bourdeaux intitulée: *Pour les incréaules, nouvelles preuves ſur la proportion du coté d'un quarré parfait avec ſa diagonale.* Cet imprimé qui ne mérite aucune attention a été mis au rebut.

Le 20 Août. S. E. M. le Directeur a remis les derniers cahiers des *Obſervations ſur la Phyſique par M. l'Abbé Rozier*, que ce ſavant Auteur a envoyées à l'Académie avec une lettre circulaire imprimée, contenant une invitation aux Académiciens de lui envoyer des mémoires & la maniere de les lui adreſſer.

Le 24 Août. Le Secrétaire a remis un Projet manuſcrit de M. *Le Roy*, Académicien de Paris, pour envoyer dans la partie ſeptentrionale de la *Sibérie*, des Phyſi-

Phyſiciens qui y faſſent des obſervations et expériences ſur les Aurores boréales. M. le Prof. *Krafft* a été chargé d'examiner ce projet & d'en faire rapport à l'Académie.

Le 27 Août. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Meſſieurs de l'Académie par M. *le Robberg-herr de Vauſenville*, accompagnée d'un programme imprimé concernant un ouvrage qui aura pour titre. *Eſſai phyſico-géométrique contenant*, 1° *la détermination du centre de gravité des ſecteurs de cercle*: 2° *la réſolution géometrique du probléme de la quadrature de cercle* &c. Les Académies ont déclaré qu'il eſt inutile de leur envoyer de ces prétendues ſolutions de la quadrature de cercle: l'arrêt a été prononcé & l'écrit de M. *de Vauſenville* rebuté.

Le 3 Septembre. M. le Prof. *Lexell* a préſenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm.

1) *Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar for Ar* 1777. *Vol.* XXXVIII.

2) *Chirurgiska Händelſer, af Olof Acrel.*

3) *Akerbrukets Chemiska Grunder utgifne af Joh. Gottsch. Wallerius.*

Le 10 Septembre. M. le Prof. *Pallas* a remis le Catalogue de la Bibliotheque & du Cabinet d'Hiſtoire naturelle de feu M. *Gronovius* que les héritiers offrent en vente.

Le 17 Septembre. Le Secrétaire a communiqué le Catalogue d'une très belle collection d'objets des trois

regnes

regnes de la Nature contenant paſſé 9000 pieces recueillies par feu M. *Pierre Pasquay* Doct. en Méd. & Conſeiller de la Cour d'Anhalt-Deſſau.

—— il a lu un rapport daté de la ville d'Oural & adreſſé à l'Académie par M. *Hildtebrandt*, Chirurgien du Bataillon de Swiäs, qui envoie une collection de ſemences, de pétrifications, & de quelques autres curioſités qu'il a ramaſſées aux environs du Lac ſalé d'Indersk.

Le 21 Septembre. M le Conſeiller d'État actuel *de Stehlin* a lu une lettre de M. *Forſter* le pere & préſenté de ſa part: *Obſervation made during a voyage round the World on phyſical Geography, Natural Hiſtory and Ethic philoſophy.*

Le 24 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *de Born* Conſeiller de Cour actuel des mines & monnoyes de L. L. M. I. & R. *Joſeph Müller's K. K. Bergweſens-Directorats-Rath, Nachricht von den in Tyrol entdeckten Turmalinen oder Aſchenziehern an Hr. Ignaz Edeln von Born.*

Le 5 Octobre. Le Sr. *Dahlgren* Suédois & maître Forgeron en cette ville ayant executé en grand l'echelle à feu de nouvelle conſtruction, dont il avoit préſenté le modele à l'Académie au commencement de l'année paſſée, Meſſieurs les Académiciens *Krafft* & *Lexell*, M. l'Adjoint *Fuſs* & le Secrétaire ont été nommés pour exami-

examiner cette échelle chez le ſusdit forgeron & d'en faire rapport à la huitaine (*).

Le 8 Octobre. M. le Prof. *Pallas* a préſenté de la part de M. *de Born*: *Index rerum naturalium Muſei Caeſarei Vindobonenſis Pars* 1ma *Teſtacea.*

Le 12 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Colonel *Lorgna* de Verone, un imprimé latin: *De caſu irreductibili tertii gradus & ſeriebus infinitis exercitatio analytica.*

Le 13 Octobre. Aſſemblée publique: voyez en le récit ci-deſſus.

Le 22 Octobre. Le Secrétaire a préſenté un écrit de M le Conſeiller d'Etat *Müller* à Moscou: *Nachrichten von der Bucharey.* (**).

Le 5 Novembre. M. le Prof. *Güldenſtädt* a remis de la part de M. *Hablitz'l* Correſpondant de l'Académie à Aſtracan une Collection d'inſectes, diverſes ſemences, des echantillons de cotton & des fleurs du ſaffran bâtard crû, cultivé à Aſtracan.

Le

(*) Acta Acad. Sc. Imp. Petrop. pro Anno 1777. P. I. Partie hiſtorique pag 67. & ci-deſſus Aſſemblée publique de 1778. pag 4

(**) Ces Notices ont été inſéré dans le Calendrier hiſtorique & géographique pour l'année 1779.

Le 16 Novembre. Le même Académicien, M. *Güldenſtädt* a préſenté *Geographiſche, hiſtoriſche und ſtatiſtiſche Nachrichten von der neuen Gränz-Linie des Ruſſiſchen Reichs zwiſchen dem Terec-Fluſs und dem Aſowiſchen Meer.* (*).

—— M. le Prof. *Krafft* a préſenté de la part de S. E. M. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale à la Haye & Honoraire de l'Académie *Obſervations ſur l'Electricité naturelle par le moyen d'un Cerf-volant.* (**).

Le 23 Novembre. M. le Prof. *Pallas* a remis un exemplaire complet du *Catalogue de la Bibliotheque & du Cabinet du Prof. Gronovius.*

Le 3 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. M. *Angelo de Caeſaris* et *Franc. Reggio*: *Ephemerides aſtronomicae anni* 1779 *ad meridianum mediolanenſem ſupputatae.*

—— de la part de M. de *Magellan*, Gentilhomme Portugais, à Londres: *Rélation ou Notice des derniers jours de M.* Jean-Jacques Rouſſeau; *circonſtances de ſa mort, & quels ſont les ouvrages poſthumes qu'on peut attendre de lui: par M.* le Begue du Presle, *Docteur en Médecine &c. avec une addition relative au même ſujet: par*

(*) Elles ſe trouvent de même dans le Calendrier hiſtorique & géographique pour l'année 1779.

(**) Voyez ci-deſſus pag. 76.

par M. Jean-Hyacinthe de Magellan, *Gentil-homme Portugais.*

—— M. *Nordſtern*, Horloger au ſervice de l'Académie Impériale des Beaux-Arts, ayant avec la permiſſion de S. E. M. le Directeur, fait expoſer dans la ſale d'Aſſemblée un modele d'un Pont de navires de ſon invention, le Secrétaire a lu l'écrit dans lequel le dit Artiſte ſoumet ſon modele au jugement de l'Académie. L'Aſſemblée nomma Meſſieurs *Kotelnikof*, *Krafft*, *Lexell*, *Inohodzof*, *Fuſs* & *Golovin* pour examiner l'ouvrage & en donner leur jugement à une des Seances prochaines. (*)

—— M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. l'Abbé *Korvin Kaſſakovski* qui annonce, que M. *Poczobut* Aſtronome de S. M. le Roi de Pologne a formé, en raſſemblant pluſieurs étoiles éparſes entre *l'Aigle* & le *Serpentaire*, une nouvelle conſtellation, qu'il a nommée à la gloire de ſon Souverain *le Taureau royal de Poniatovsky*: il invite Meſſieurs les Aſtronomes & Géographes de Ruſſie d'adopter cette conſtellation dans leurs Globes, Planiſphères & Cartes celeſtes, comme l'ont déja fait ceux de France & d'Angleterre. L'Académie s'y preta avec le plus grand plaiſir & ſe joignit avec empreſſement à ces autres Compagnies de Savans, pour donner au Monarque eclairé, qu'elle ſe glorifie de compter au nombre de ſes Aſſociés Honoraires cette foible marque de ſon hommage & admiration.

(*) Voyez ce jugement. pag. 85.

Le 14 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller d'État Baron *d'Aſch* les deſſins de ſept monſtres d'une ſingularité rare que le College de Médecine poſſede dans ſon Cabinet à Moſcou.

Le 21 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Jean Bernoulli* Académicien de Berlin la Ire Partie du IVme Cahier de ſes *Nouvelles littéraires de divers païs.*

—— M. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de M. le Prof. *Camper* contenant des additions à ſes obſervations ſur les crânes des Rhinoceros avec diverſes autres remarques & découvertes importantes en Phyſique & Médecine.

Les Obſervations météorologiques de Berlin ont été préſentées tous les mois par le Secrétaire, qui a eu ſoin d'envoyer en échange à Berlin celles qu'il a faites à St. Pétersbourg.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
CVRVIS TRIANGVLARIBVS.

Auctore
L. EVLER.

§. 1.

Curuas triangulares voco, quae tribus arcubus AB, AC et BC intus inflexis conſtant, qui in angulis A, B et C coeant, praeterea autem nullos alios ramos contineant. Huiusmodi ergo curuae vt ſint continuae, ſiue quapiam aequatione, vel algebraica, vel etiam tranſcendente, exprimi queant, neceſſe eſt, vt in angulis A, B et C habeant cuſpides acutiſſimas, vbi bini arcus coeuntes communi tangente ſint praediti. Tales autem curuas innumerabiles exhiberi poſſe, tam algebraicas, quam tranſcendentes, iam olim oſtendi, cum Problema de eiusmodi curuis, circa datum punctum lucidum deſcribendis, propoſuiſſem, ita vt omnes radii, a curua bis reflexi, iterum in ipſum punctum lucidum reuertantur, quod Problema variis ſolutionibus in Actis Lipſienſibus pro Annis 1746 et 1748 ſolutum reperitur. Hic enim tota Tab. I. Fig. 1.

 ſolutio

ſolutio ad inuentionem huiusmodi curuarum triangularium reducitur, quippe quibus cauſticae radiorum reflexorum formantur.

Tab. I. Fig. 2. §. 2. Praeter eum vſum autem, quem iſtiusmodi curuae triangulares in commemorato problemate catoptrico praeſtant, imprimis conſiderari merentur curuae, quae ex euolutione talis curuae triangularis A B C naſcuntur. Hunc in finem vocemus longitudinem arcus $AB = c$, arcus $AC = b$ et arcus $BC = a$. Iam arcui A B concipiatur filum applicatum, quod extra A prolongetur vsque in F, ita vt ſit $AF = f$, et ſtilus in F inſertus promoveatur, donec arcus A B fuerit euolutus, et filum perueniat in ſitum B g, eritque $Bg = AF +$ arcu $AB = f + c$; tum motus ſtili continuetur et filum B g ſucceſſiue applicetur arcui $BC = a$, donec perueniat in H, eritque

$$BC + CH = Bg = f + c, \text{ vnde fit } CH = f + c - a;$$

quo cum fuerit peruentum, filum applicetur arcui C A; vbi notari conuenit, perinde eſſe, ſiue arcus C A maior ſit, ſiue minor arcu C B; ſemper enim filum totum arcum C A occupare debet. Iam motus ſtili ex H continuetur in f, donec filum f A cuſpidem A tangat, tum igitur erit

$$Af = CH + AC = f + c - a + b;$$

Nunc igitur filum motum A f ſucceſſiue arcum A B inuoluet, donec perueniat in G, eritque

$$BG = Af - AB = f - a + b.$$

Iam filum ab arcu B A transferatur in arcum B C et euoluatur, donec perueniat in ſitum C b, vbi erit

$$Cb = BG + BC = f + b.$$

Denique ſtilus ab b promoueatur inuoluendo arcum C A, hoc-

hocque modo reuertetur in ipſum punctum F, vbi motus eſt inceptus: erit enim $AF = Cb - CA$, ideoque $AF = f$; erat autem vtique $AF = f$.

§. 3. Hinc igitur patet, curuam, ex euolutione curvae triangularis A B C natam, eſſe curuam in ſe redeuntem, et tractu vniformi praeditam, ſcilicet $F g H f G b F$, ſi modo puncta F, H, G extra curuam A B C cadant. Atque hic iſta inſignis proprietas ante omnia ſe offert: quod rectae $F A f$, $H C b$ et $G B g$ non ſolum vtrinque ad curuam ſint normales, vti ex natura euolutionis manifeſtum eſt, ſed etiam, quod inter ſe ſint aequales; eſt enim

$$FAf = AF + Af = 2f + c - a + b,$$

tum vero

$$ACb = CH + Cb = 2f + c - a + b,$$

ſimili modo

$$GBg = BG + Bg = 2f + c - a + b.$$

Verum haec proprietas multo latius patet. Si enim per quoduis punctum S noſtrae curuae triangularis producatur vtrinque tangens $X S x$, ea etiam ex natura euolutionis vtrinque ad curuam deſcriptam erit normalis; tum vero erit

$$SX = CS + CH = f + c - a = CS,$$

deinde vero etiam erit

$$Sx = FA + AS = f + AS$$

hinc tota recta

$Xx = 2f + c - a + CS + AS = 2f + c - a + b$, ob $AS + CS = AC = b$, quocirca curua, ex euolutione curuae triangularis A B C nata, hac eximia gaudet proprietate: vt ſi ad eius punctum quodcunque X ducatur normalis, donec curuae iterum oc-

 currat

currat in x, ea etiam in hoc puncto ad curuam ſit normalis, ac praeterea tota hac recta Xx vbique eandem habeat longitudinem $= 2f + c - a + b$, quae proprietas vulgo circulo tam propria eſſe videtur, vt vix in alias lineas curuas competere poſſe videatur.

§. 4. Mirum hic ſine dubio videbitur, quod terna latera figurae triangularis a, b et c non aequaliter in formulas inuentas ingrediantur Ratio autem huius diſparitatis in eo eſt ſita, quod interuallum A F potius quam C H vel B G ſimplici litera f deſignauimus. Quo igitur hanc inaequalitatem euitemus, et vniformitatem in calculum introducamus, vocemus interuallum $AF = k + a$, ita vt ſit $f = k + a$, atque omnes rectae ſupra exhibitae iam ſequenti modo concinne exprimentur:

$$AF = k + a; \quad BG = k + b; \quad CH = k + c$$
$$Af = k + b + c; \quad Bg = k + a + c; \quad Ch = k + a + b$$

tum vero nunc longitudo omnium rectarum, per curuam deſcriptam normaliter ductarum, erit $= 2k + a + b + c$. Hic autem quantitatem k pro lubitu accipere licet, ita vt ex eadem figura triangulari innumerae curuae iſtius indolis deſcribi poſſint. Quin etiam quantitas k adeo negatiue accipi poterit, dummodo formulae $k + a$; $k + b$ et $k + c$ poſitiuos obtineant valores; ſi enim haec interualla fierent negatiua, curua deſcripta non amplius prodiret circuli-formis, ſed intra curuam A B C caderet, atque etiam tres
Tab. I. Fig. 3. cuſpides g, f, h eſſet habitura, quemadmodum ex natura euolutionis facile colligere licet.

§. 5. Huiusmodi autem curuas, ex euolutione curvarum triangularium natas, quatenus cum circulo tam egregie

gregie conueniunt, breuitatis gratia *Orbiformes* nomine- mus, hicque ante omnia obſeruaſſe iuuabit, ex qualibet curua orbiformi problema catoptricum ſupra memoratum infinitis modis facillime reſolui poſſe. Sit enim F G H talis curua orbiformis quaecunque, intra qua punctum lucidum X pro lubitu conſtituatur; tum ducta recta qua- cunque X *x*, ad curuam vtrinque normali, quae ergo conſtantem habebit magnitudinem, iungantur rectae L X et L *x*, eaeque biſecentur in punctis O et *o*, vnde ad eas normaliter educantur rectae O Z et *o z*, rectae X *x* occurréntes in punctis Z et z; haecque duo puncta ſita erunt in curua quaeſita. Radius enim L Z, primo refle- xus, fiet Z *z*, qui, denuo reflexus in *z*, in ipſum pun- ctum lucidum L remittetur, quemadmodum ex natura re- flexionis haud difficulter demonſtrare liceret, niſi hoc ar- gumentum iam vberrime eſſet pertractatum. Tab. I. Fig. 4.

§. 6. Ob hunc inſignem vſum curuarum triangu- larium vtique optandum eſſet, vt methodus certa pateret, cuius ope huiusmodi curuas triangulares, quotquot libuerit, inueſtigare liceret, id quod primo intuitu nimis difficile videri poteſt. Verum hanc inueſtigationem inuertamus, ac primo quaeramus curuas orbiformes, quales hactenus de- ſcripſimus; tum enim certi eſſe poterimus, earum euolutas huiusmodi fore curuas triangulares quales deſideramus, Praeterea vero etiam hoc modo iſtud commodum aſſe- quemur: vt, quoties curua orbiformis fuerit algebraica, toties quoque curua triangularis non ſolum fiat alge- braica, ſed inſuper etiam rectificabilis, quandoquidem euolutae omnium curuarum algebraicarum ſimul rectifica- tionem admittunt.

§. 7.

Tab. I. Fig. 5. §. 7. Sit igitur F M $f m$ talis curua orbiformis, qualem inueſtigare nobis eſt propoſitum, in qua ſumamus rectam F f pro axe fixo, qui vtrinque ad curuam ſit normalis, cuius longitudinem ponamus $Ff = 2f$. Tum ex puncto quocunque M ad curuam ducatur normalis M m, quae ergo etiam in m ad curuam debet eſſe normalis, eiusque longitudo M m itidem ſit $= 2f$. Iam ex punctis M et m ad axem F f demittantur perpendicula P M et $p m$, ac pro puncto M vocentur coordinatae $FP = X$ et $PM = Y$; at pro puncto m ſit $Fp = x$ et $pm = -y$, quia haec applicata in partem contrariam cadit. His poſitis talis aequatio inter X et Y deſideratur, vt, ſi loco X ſcribatur x, valor ipſius Y ſponte prodeat $= -y$. Niſi enim hoc fieret, tota curua F M $f m$ non eſſet continua. Sequenti autem modo hae quatuor quantitates a ſe inuicem pendent: Cum interuallum P N ſit ſubnormalis reſpectu puncti M, poſito $dY = P dX$, erit haec ſubnormalis $PN = PY$, hincque normalis $MN = Y\sqrt{1+PP}$. Simili modo pro altero puncto m erit p N ſubnormalis retro poſita; vnde ſumto $dy = p\,dx$ erit $pN = -py$; hinc normalis $mN = -y\sqrt{1+pp}$. Quia igitur triangula P M N et $p m$ N ſunt ſimilia, erit $P = p$. Porro quia nouimus eſſe $Mm = 2f$, ex m agatur axi parallela m S, ipſi M P productae occurrens in S, et ſimilitudo triangulorum M N P et M m S dabit $MS = \frac{2f}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $mS = \frac{2fp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum igitur ſit

$$MS = MP + mp = Y - y \text{ et } mS = Fp - FP = x - X$$

hinc colligitur

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } x - X = \frac{2fp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

prae-

praeterea vero, vti iam notauimus, debet eſſe

$$\frac{dY}{dX} = P = p \text{ et } \frac{dy}{dx} = p.$$

§. 8. Cum igitur inuenerimus differentias coordinatarum $Y - y$ et $x - X$, ſtatuamus earum ſummas $X + x = 2Q$ et $Y + y = 2R$, hincque ſingulas coordinatas adipiſcemur ita expreſſas:

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}};$$
$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Hinc igitur differentiando erit

$$dX = dQ - \frac{f\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dY = dR - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dx = dQ + \frac{f\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dy = dR + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur eſſe debeat $dY = p\,dX$ et $dy = p\,dx$, fiet

$$dR - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,dQ - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$dR + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,dQ + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ex vtraque harum aequationum ſequitur fore $dR = p\,dQ$, ideoque $R = \int p\,dQ$.

§. 9. Cum igitur omnibus conditionibus ſatisfecerimus, quantitas Q arbitrio noſtro permittitur, eiusque ergo loco functio quaecunque ipſius p accipi poterit, quae autem ita debet eſſe comparata, vt formula $p\,d\,Q$ integrationem admittat, ſiquidem curuas algebraicas deſideremus. Quoniam igitur pro coordinatis x et y inuenimus:

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } y = R - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}}$$

exiſtente $R = \int p\,d\,Q$; pro alteris vero coordinatis X et Y fit

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } Y = R + \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}},$$

manifeſtum eſt, has ex illis naſci, ſi modo formulae radicalis $\sqrt{(1+pp)}$ ſignum immutetur. Quare cum haec formula per ſuam naturam ſit ambigua, priores formulae, pro x et y inuentae, poſteriores pro X et Y iam ſponte inuoluunt, ita vt eadem aequatio rationalis tam pro x et y quam pro X et Y neceſſario ſit proditura. Ad hoc autem neceſſe eſt, vt neque Q neque R eandem formulam $\sqrt{(1+pp)}$ inuoluant, quia alioquin etiam ſignum harum litterarum mutari oporteret. Hinc igitur iſta regula ſtatui poteſt: vt pro Q functio rationalis ipſius p accipi debeat.

§. 10. Vt autem curuas algebraicas obtineamus, quia eſſe debet $R = \int p\,d\,Q = p\,Q - \int Q\,d\,p$, ſtatuamus $\int Q\,d\,p = S$, denotante S functionem quamcunque rationalem ipſius p, eritque $Q = \frac{d\,S}{d\,p}$, hincque porro $R = \frac{p\,d\,S}{d\,p} - S$. Nunc igitur pro curuis orbiformibus ſequentes determinationes ambarum coordinatarum x et y exhibere poſſumus:

$$x = \frac{d\,S}{d\,p} + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}};\quad y = \frac{p\,d\,S}{d\,p} - S - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}};$$

vbi pro S functionem quamcunque rationalem ipſius p, vel ſaltem talem, accipere poſſumus, quae, dum formula $\sqrt{(1+pp)}$ eſt ambigua, eundem valorem retineat.

§. 11. Quia natura orbis, qualem conſideramus, poſtulat, vt curua ſit in ſe rediens, et nusquam in infinitum porrigatur, functio S ita comparata eſſe debet, vt neque abſciſſa x neque applicata y vnquam fieri poſſit infinita, quem in finem hanc functionem S tali fractioni:

$$\frac{\alpha + \beta p + \gamma pp + \delta p^3 + etc.}{A + Bp + Cpp + Dp^3 + etc.}$$

aequari opportet, cuius denominator nullum habeat factorem ſimplicem realem; ſi enim factorem talem haberet, puta $p - n$, tum, ſumto $p = n$, valor ipſius S fieret infinitus. Deinde ſumma poteſtas ipſius p in numeratore haud debet eſſe maior quam in denominatore; aliter enim, caſu $p = \infty$, valor ipſius S iterum in infinitum excreſceret. Praeterea vero etiam exponentes fracti ipſius p admitti quidem poſſent, ita tamen, vt nullum membrum ambiguum obtineat valorem, quia alioquin eidem valori ipſius p plures tam abſciſſae quam applicatae conuenire poſſent; hoc enim caſu curua non poſt vnam reuolutionem, ſed demum poſt duas pluresue in ſe rediret; tum autem eius euoluta non amplius foret curua triangularis, ſed vel pentagona, vel heptagona, vel enneagona vel etc. id quod inſtituto noſtro aduerſatur.

§. 12. Ex hac conſtructione generali, in qua continentur omnes curuae orbiformes, et quidem ſimplices, quae poſt vnam reuolutionem in ſe redeunt, facile erit formulas elicere pro deſcriptione curuarum triangularium; cum enim euolutae harum curuarum orbiformium certe ſint figurae triangulares, tantum opus eſt, vt in euolutas iſtarum curuarum inquiramus. Quia autem omnes illae curuae, pro quouis valore litterae f, ex euolutione eiusdem curuae triangula-

ris naſcuntur, littera f non in determinationem euolutae ingreditur; vnde in formulis noſtris, pro x et y inuentis, partes, hanc litteram f inuoluentes, tuto omittere licebit; ſicque pro hac inueſtigatione habebimus tantum

$$x = \frac{dS}{dp} \text{ et } y = \frac{p\,dS}{dp} - S,$$

quam ob rem naturam euolutae, ex his valoribus oriundae, inueſtigaſſe ſufficiet.

Tab. I. Fig. 6. §. 13. Sit igitur $FMfm$ talis curua, in qua ſit abſciſſa $FP = x = \frac{dS}{dp}$, applicata $PM = y = \frac{p\,dS}{dp} - S$, et ducta normali Mm erit ſubnormalis

$$PN = py = \frac{pp\,dS}{dp} - pS$$

vnde fit recta

$$FN = \frac{dS}{dp}(1 + pp) - pS.$$

Ponamus nunc angulum $FNM = \Phi$, erit tang. $\Phi = \frac{1}{p}$, ideoque $p = \cot.\Phi = \frac{\cos.\Phi}{\sin.\Phi}$, vnde fit

$$\sin.\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

tum vero etiam $d\Phi = -\frac{dp}{1+pp}$. Quod ſi iam breuitatis gratia ponamus $FN = v$, notum eſt, centrum circuli, curuam in M oſculantis, fore in puncto U, ita vt ſit

$$NU = \frac{dv \sin.\Phi}{d\Phi};$$

Cum autem, ſumto elemento dp conſtante, ſit

$$dv = \frac{ddS}{dp}(1 + pp) + p\,dS - S\,dp \text{ et}$$

$$\frac{\sin.\Phi}{d\Phi} = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

erit recta

$$NU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,dS}{dp}\sqrt{(1+pp)} + S\sqrt{(1+pp)}$$

pro qua formula breuitatis ergo ſcribamus r, ita vt ſit $NU = r$.

§. 14.

§. 14. Inuento puncto U, quod erit in euoluta, quam quaerimus, inde ad axem ducamus perpendiculum U T, ac pro euoluta vocemus abſciſſam F T $= t$ et applicatam T U $= u$; erit autem:

$$NT = NU \operatorname{coſ.} \Phi = \frac{pr}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et}$$

$$TU = NU \operatorname{ſin.} \Phi = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vnde, loco r valorem aſſumtum ſubſtituendo, conſequemur abſciſſam

$$t = FN + NT = \frac{dS}{dp} - \frac{pddS}{dp^2}(1+pp),$$

tum vero applicatam

$$u = S - \frac{pdS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp);$$

vnde colligimus

$$t - pu = \frac{dS}{dp}(1+pp) - pS.$$

Ope igitur harum formularum, quaecunque functio idonea ipſius p pro S accipiatur, tam abſciſſam F T $= t$ quam applicatam T U $= u$ aſſignare poterimus, quibus curua triangularis determinatur. Valores autem idoneos, pro S accipiendos, ſupra indicauimus.

§. 15. Quo hanc inueſtigationem exemplo illuſtremus, ſumamus

$$S = \frac{ap}{1+pp}, \text{ eritque}$$

$$\frac{dS}{dp} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \text{ et } \frac{ddS}{dp^2} = \frac{2ap^3 - 6ap}{(1+pp)^3}$$

vnde colligimus

$$t = \frac{a + 5app - 2ap^4}{(1+pp)^2} \text{ et } u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}.$$

Hinc primo patet, ſiue p ſumatur poſitiue ſiue negatiue, abſciſſam t eandem manere, applicatam vero u hoc caſu in partem

 con-

contrariam cadere, vnde axis noſter F T huius curuae erit diameter. Deinde, ſumto $p = 0$ fiet $t = a$ et $u = 0$; at ſi capiatur p infinite paruum, fiet

$$t = a + 3app \text{ et } u = 6ap.$$

Porro, ſumto $p = \frac{1}{2}$, erit $t = \frac{34}{25}a$ et $u = \frac{48}{25}a$; ſin autem $p = 1$ erit $t = a$ et $u = \frac{3}{2}a$. Sit denique $p = \infty$, eritque $t = -2a$ et $u = 0$. Hinc patet, curuam huiusmodi figuram eſſe habituram, qualem in figura ei dedimus, ternas cuſpides habentem, B, C, D, exiſtente $FD = 2a$ et $FA = a$. Pro alteris cuſpidibus B et C quaeratur locus, vbi applicata u fit maxima, et cum ſit

Tab. I. Fig. 7.

$$d.\frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{dp(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

hoc eueniet, vbi $3pp = 1$, ſiue $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tum autem fiet abſciſſa $t = \frac{11}{8}a$ et $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Ergo ducta chorda B C, axem ſecante in E, erit $FE = \frac{11}{8}a$ et $EB = EC = \frac{9\sqrt{3}}{16}a$. Quod ſi iam quoque ducantur chordae B D et C D, ob $DE = \frac{27}{8}a$ erit $BD^2 = \frac{972}{64}aa$, vnde fit $BD = CD = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$; ex quo patet, chordas omnes B D, C D et B C eſſe inter ſe aequales. Referet ergo haec curua triangularis triangulum aequilaterum.

Tab. I. Fig. 6.

§. 16. Accuratius autem in ſymptomata noſtrae curuae triangularis inquiramus, et quoniam pro coordinatis $FT = t$ et $TU = u$ has inuenimus formulas:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{pddS}{dp^2}(1+pp) \text{ et}$$

$$u = S - \frac{pdS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp)$$

primum obſeruo, rectam N U eſſe tangentem curuae in puncto U, quae cum ad axem ſit inclinata angulo $TNU = \Phi$, cuius cotangens eſt p, neceſſe eſt vt ſit $\frac{du}{dt} = \text{tag.}\,\Phi = \frac{1}{p}$, vnde fit

$dt =$

$dt = p\,du$. Eſt vero per formulas

$$dt = -\frac{3pp\,dds}{dp} - \frac{p(1+pp)\,d^3s}{dp^2} \text{ et}$$

$$p\,du = -\frac{3pp\,dds}{dp} - \frac{p(1+pp)\,d^3s}{dp^2},$$

ideoque reuera $dt = p\,du$.

§. 17. Quia igitur eſt $dt = p\,du$, iisdem caſibus, quibus fit $\frac{dt}{dp} = 0$, etiam fiet $\frac{du}{dp} = 0$; vnde patet, vbicunque abſciſſa t fuerit vel maxima vel minima, ibidem quoque fore applicatam maximam vel minimam, quae proprietas vtique in cuſpides conuenit. Ex quo colligimus, vbicunque ambae coordinatae p et q ſimul fiunt vel maximae vel minimae, ibi quoque exiſtere cuſpides noſtrae curuae; quare cum curua habeat tres cuſpides, in tribus quoque locis tam t quam u maximum fieri neceſſe eſt.

§. 18. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, noſtram curuam triangularem eſſe rectificabilem, quippe cuius arcus aequalis eſt radio oſculi M U curuae orbiformis, vnde eſt nata. Vidimus autem eſſe Tab. I. Fig 6.

$$NU = r = -\frac{dds}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,ds}{dp}\sqrt{1+pp}$$
$$+ S\sqrt{1+pp}; \text{ at } MN = y\sqrt{1+pp}$$
$$= \frac{p\,ds\sqrt{1+pp}}{dp} - S\sqrt{1+pp},$$

vnde fit radius oſculi

$$MU = -\frac{dds}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

qui ergo longitudinem noſtrae curuae triangularis exprimit; id quod etiam patet ex proprietate ſupra obſeruata, quod ſit $dt = p\,du$, vnde fit elementum curuae

$\sqrt{dt^2}$

$$\sqrt{dt^2+du^2}=du\sqrt{1+pp}=$$

$$-\frac{3p\,d\,dS}{dp}\sqrt{1+pp}-\frac{d^3S}{dp^3}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$-\frac{d\,dS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}.$$

§. 19. Quoniam hic tantum curuas triangulares inueſtigare inſtituimus, parum ſolliciti, vtrum ſint rectificabiles nec ne, dummodo fuerint algebraicae: hac conditione omiſſa ſimpliciores formulas pro coordinatis t et u exhibere, atque adeo, ſine vllo reſpectu ad curuas orbiformes habito, directe ex ipſa indole harum curuarum elicere poterimus. Cum enim eſſe debeat $dt=p\,du$, erit $t=\int p\,du=pu-\int u\,dp$. Iam ſtatuamus $\int u\,dp=\Pi$, ita vt ſit $u=\frac{d\Pi}{dp}$, vnde fit $t=\frac{p\,d\Pi}{dp}-\Pi$; vbi pro Π eiusmodi functiones ipſius p accipi debent, quae nullo caſu fiant infinitae, quicunque valores literae t tribuantur, cuiusmodi functiones iam ſupra deſcripſimus; tum vero etiam hae functiones Π nulla ſigna radicalia, quae ambiguitatem inuoluant, inuoluere debent. Imprimis autem neceſſe eſt, vt ambae coordinatae t et u tribus caſibus fiant maximae vel minimae, id quod eueniet, ſi, ob $u=\frac{d\Pi}{dp}$, haec aequatio: $\frac{d\,d\Pi}{dp^2}=0$, tres habeat radices reales, neque vero plures.

§. 20. Sumamus exempli gratia $\Pi=\frac{a+bp}{1+fp+gpp}$, quae nullo caſu fit infinita, ſi modo fuerit $ff<4g$, tum autem erit

$$\frac{d\Pi}{dp}=\frac{b-af-2agp-bgpp}{(1+fp+gpp)^2}=u$$

hincque

$t=-$

$$s = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gpp)^2}.$$

Vt iam ternas cuſpides definiamus, conſideremus aequationem $\frac{du}{dp} = 0$, quod quo facilius fieri poſſit ponamus

$$u = \frac{A + Bp + Cpp}{(1 + fp + gpp)^2},$$

ita vt ſit $A = b - af$; $B = -2ag$; $C = -bg$; tunc vero hinc reperitur ſequens aequatio:

$$B - 2Af + (2C - Bf - 4Ag)p - 3Bgpp - 2Cgp^3 = 0$$

cuius tres radices nobis ternas cuſpides monſtrabunt.

§. 21. Ponamus iam huius aequationis radices eſſe: I°. $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ ac III°. $p = \gamma$, ſiue aequemus formulam inuentum huic producto:

$$2Cg\,(\alpha - p)\,(\beta - p)\,(\gamma - p)$$

quod euolutum praebet

$$2Cg\alpha\beta\gamma - 2Cg(\alpha\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma)p + 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)pp - 2Cgp^3$$

quae forma, inuentae aequata, ſequentes tres producit determinationes:

I°. $B - 2Af = 2Cg\alpha\beta\gamma$;

II°. $2C - Bf - 4Ag = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$;

III°. $-3Bg; = 2Cg\,(\alpha + \beta + \gamma)$;

ex quarum tertia fit $B = -\frac{2}{3}C(\alpha + \beta + \gamma)$; ex prima vero

$$A = -\frac{1}{3f}C\,(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

qui valores in ſecunda ſubſtituti praebent

$$2C + \frac{(2ff + 4g)}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

quae aequatio, per $\frac{3f}{2C}$ multiplicata, abit in hanc:

$$3f + (ff + 2g)(\alpha + \beta + \gamma) + 6gg\alpha\beta\gamma = -3fg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

haecque aequationes omnes continent determinationes, quibus noſtro propoſito ſatisfit.

§. 22. Antequam hanc determinationem in genere vlterius proſequamur, euoluamus caſum ſpecialem, quo

$\gamma = 0$ et $\beta = -\alpha$, vnde fit $\alpha\beta\gamma = 0$;

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\alpha^2$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$,

eritque poſtrema aequatio $3f = 3\alpha\alpha f g$, ſiue $f = \alpha\alpha f g$; vnde ſequitur vel $f = 0$, vel $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$. Conſideremus primo caſum $f = 0$, fietque $A = -\frac{0}{0}$, vnde littera A non determinatur, vel potius fit $A = 0$, porroque $B = 0$, vnde colligitur $b = 0$, ſiue etiam b non determinatur; tum vero erit $a = 0$. Quia autem aequationem poſtremam per f multiplicauimus, hic valor $f = 0$ lubricus eſt habendus. Sumamus igitur alterum valorem $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$, et quia debet eſſe $ff < 4g$, ſequitur eſſe debere $f < \frac{2}{\alpha}$; hinc vero fiet $A = 0$ et $B = 0$, ideoque $b - af = 0$, et $-2ag = 0$, vnde fit $a = 0$.

§. 23. Sufficiat autem haec in genere indicaſſe, et conſideremus potius caſum magis determinatum, ſumendo

$\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}$, vnde fit $\frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2}$ et

$t = \frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}$.

Quod ſi iam pro cuſpidibus faciamus $\frac{du}{dp} = 0$, naſcitur haec aequatio: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, cuius ternae radices ſunt

I°. $p = 0$; II°. $p = +\alpha\sqrt{3}$; III°. $p = -\alpha\sqrt{3}$;

pro quarum prima habebimus $t = 0$ et $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

pro ſecunda:

$$t = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ et } u = -\frac{b}{8\alpha\alpha};$$

pro tertia vero:

$$t = -\frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ et } u = -\frac{b}{8\alpha\alpha},$$

vnde

vnde curua habebit formam in figura 8 delineatam, vbi eſt Tab. I. Fig. 8.

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha},\ FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ ac}$$

$$GC = HD = \frac{+b}{8\alpha\alpha},$$

ſicque ternae cuſpides erunt in punctis B, C, D, ac ductis chordis erit

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3}(1+\alpha\alpha)}{8\alpha\alpha} \text{ et } CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha},$$

ita vt haec figura triangularis triangulum iſoſceles exhibeat.

§. 24. Euoluamus ſimili modo caſum $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha+pp}$, vnde fit

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha+pp)^2}, \text{ hincque } t = -\frac{a(\alpha\alpha+3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^2}.$$

Nunc pro cuſpidibus fiat

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2a(\alpha\alpha-3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^3} = 0,$$

quae aequatio tantum duas praebet radices

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \text{ et } p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

tertia autem radix eſt $p = \infty$. Hinc igitur pro prima cuſpide, quae fit vbi $p = \infty$, fit $t = 0$ et $u = 0$, ſicque haec cuſpis B cadit in ipſum punctum F. Pro ſecunda cuſpide ſumatur Fig. 9.

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ eritque } t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \text{ et } u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Pro tertia cuſpide fit

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ erit } t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \text{ et } u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Sumto igitur $FG = \frac{9a}{8\alpha\alpha}$ binae reliquae cuſpides erunt in C et D, ita vt ſit $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, ideoque earum diſtantia $CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}$, vnde colligitur

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha+3}}{8\alpha^3}$$

ſicque

ſicque erit

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

ex quo patet, caſu $\alpha = 1$ triangulum fore aequilaterum.

§. 25. Quod ſi ergo ambo caſus praecedentes combinentur, ita vt ſtatuatur $\Pi = \frac{a + bp}{\alpha\alpha + pp}$, tum tam abſciſſa t quam applicata u aequabitur ſummae ambarum praecedentium formularum, ita vt ſit

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \text{ et } u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

vnde ſi pro cuſpidibus inueniendis ponamus $\frac{du}{dp} = 0$, habebimus hanc aequationem:

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0, \text{ ſiue } bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

cuius ergo ternas radices quaeri oportet, quod cum per regulam *Cardani* difficulter praeſtetur, triſectione anguli vtamur, quem in finem fingamus eſſe $p = r + s \operatorname{coſ.} \Phi$, eritque

$$pp = rr + \tfrac{1}{2}ss + 2rs \operatorname{coſ.} \Phi + \tfrac{1}{2}ss \operatorname{coſ.} 2\Phi \text{ et}$$
$$p^3 = r^3 + \tfrac{3}{2}rss + (3rrs + \tfrac{3}{4}s^3) \operatorname{coſ.} \Phi + \tfrac{3}{2}rss \operatorname{coſ.} 2\Phi + \tfrac{1}{4}s^3 \operatorname{coſ.} 3\Phi$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra transmutabitur in ſequentem:

$$+br^3 + 3brrs \operatorname{coſ.} \Phi + \tfrac{3}{2}brss \operatorname{coſ.} 2\Phi + \tfrac{1}{4}bs^3 \operatorname{coſ.} 3\Phi$$
$$+ \tfrac{3}{2}brss + \tfrac{3}{4}bs^3 \operatorname{coſ.} \Phi + \tfrac{3}{2}ass \operatorname{coſ.} 2\Phi$$
$$+ 3arr + 6ars \operatorname{coſ.} \Phi$$
$$+ \tfrac{3}{2}ass - 3b\alpha\alpha s \operatorname{coſ.} \Phi$$
$$- 3b\alpha\alpha r$$
$$- a\alpha\alpha.$$

Nunc definiantur litterae r et s ita, vt membra intermedia,

dia, tam coſ. Φ quam coſ. 2Φ innoluentia, ſeorſim euaneſcant, vnde hae duae aequationes oriuntur:

$$\text{I}^{\circ}.\; 3brrs + \tfrac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha\alpha s = 0;$$

$$\text{II}^{\circ}.\; \tfrac{3}{2}brss + \tfrac{3}{2}ass = 0;$$

ex quarum poſteriore fit $r = -\frac{a}{b}$, qui valor in priore ſubſtitutus dat

$$\frac{3aas}{b} + \tfrac{3}{4}bs^3 - \frac{6aas}{b} - 3b\alpha\alpha s = 0, \text{ vnde fit}$$

$$ss = \frac{4(bb\alpha\alpha + aa)}{bb}, \text{ ideoque } s = \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b}.$$

Hi iam valores in noſtra aequatione ſubſtituantur, fietque

$$\frac{2a^3}{bb} + 2a\alpha\alpha + \tfrac{1}{4}bs^3 \text{ coſ. } 3\Phi = 0,$$

vnde fit

$$\text{coſ. } 3\Phi = -\frac{4a(aa + bb\alpha\alpha)}{b^3 s^3} = -\frac{a}{\sqrt{(aa + bb\alpha\alpha)}}.$$

Quaeratur igitur angulus ω, cuius Coſinus ſit

$$= -\frac{a}{\sqrt{(aa + bb\alpha\alpha)}},$$

qui Coſinus cum etiam conueniat angulis $-\omega$; $2\pi - \omega$; item $2\pi + \omega$, habebimus ſequentes valores:

$$\text{I}^{\circ}.\; 3\Phi = \omega,\; \text{II}^{\circ}.\; 3\Phi = -\omega,\; \text{III}^{\circ}.\; 3\Phi = 2\pi - \omega,$$
$$\text{IV. et } 3\Phi = 2\pi + \omega;$$

vnde omiſſo ſecundo valore, quippe qui a primo non diſcrepat, tres valores pro angulo Φ erunt

$$\text{I}^{\circ}.\; \Phi = \tfrac{1}{3}\omega,\; \text{II}^{\circ}.\; \Phi = 120^{\circ} - \tfrac{1}{3}\omega \text{ et III}^{\circ}.\; \Phi = 120^{\circ} + \tfrac{1}{3}\omega,$$

quibus inuentis terni valores litterae p erunt

$$\text{I}^{us}.\; p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b} \text{ coſ. } \tfrac{1}{3}\omega,$$

$$\text{II}^{us}.\; p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b} \text{ coſ. } (120^{\circ} - \tfrac{1}{3}\omega),$$

$$\text{III}^{us}.\; p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b} \text{ coſ. } (120^{\circ} + \tfrac{1}{3}\omega).$$

 §. 26.

§. 26. His caſibus euolutis reuertamur ad quaeſtionem noſtram generalem, qua eiusmodi curuae triangulares quaeruntur, in quibus pro cuſpidibus littera p ternos datos obtineat valores, ſcilicet: $p = \alpha$, $p = \beta$ et $p = \gamma$. Nunc autem primo ponamus breuitatis gratia $\alpha + \beta + \gamma = \zeta$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta$ et $\alpha\beta\gamma = \theta$, et tres aequationes adimplendae erunt

$$\text{I}^\circ.\ B - 2Af = 2Cg\theta.$$
$$\text{II}^\circ.\ 2C - Bf - 4Ag = -2Cg\eta.$$
$$\text{III}^\circ.\ -3Bg = 2Cg\zeta.$$

Cum igitur eſſet

$$A = b = af,\ B = -2ag \text{ et } C = -bg,$$

hinc ternae noſtrae aequationes erunt

$$\text{I}^a.\ -ag - bf + aff = -bgg\theta$$
$$\text{II}^a.\ -3b + 3af = bg\eta$$
$$\text{III}^a.\ 3a = -b\zeta;$$

ex quibus ſtatim ternos valores pro fractione $\frac{a}{b}$ nanciſcimur, qui ſunt:

$$\text{I}^\circ.\ \tfrac{a}{b} = \tfrac{f - gg\theta}{ff - g};\ \text{II}^\circ.\ \tfrac{a}{b} = \tfrac{g\eta + 3}{3f} \text{ et III}^\circ.\ \tfrac{a}{b} = -\tfrac{\zeta}{3}.$$

§. 27. Quod ſi iam horum valorum ſecundus et tertius inter ſe aequentur, prodibit $f = -\frac{g\eta + 3}{\zeta}$. Aequetur nunc primus valor etiam tertio, et erit

$$3f - 3gg\theta = -ff\zeta + g\zeta,$$

vbi, ſi loco f valor modo inuentus ſubſtituatur, prodibit

$$3g\eta - 3gg\zeta\theta = g\zeta\zeta - gg\eta\eta$$

quae aequatio per g diuiſa dat

$$3\eta - 3g\zeta\theta = \zeta\zeta - g\eta\eta,$$ vnde concluditur

$g = \frac{3\eta - \zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta}$, hincque porro $f = \frac{\zeta\eta - 9\theta}{3\zeta\theta - \eta\eta}$.

§. 28. His valoribus inuentis denominator ſupra aſſumtus $1 + fp + gpp$ hanc induet formam:

$$\frac{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

in quo eſſe debet $ff < 4g$. Eſt vero

$$ff = \frac{\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2} \text{ et}$$

$$4g = \frac{12\eta - 4\zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta} = \frac{36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

Neceſſe igitur eſt vt ſit

$$\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta < 36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta$$

quod ſine dubio ſponte euenit. Pro numeratore ſumamus

$$a = -\frac{\zeta c}{3\zeta\theta - \eta\eta} \text{ et } b = \frac{3c}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

ita vt fractio pro Π aſſumenda ſit

$$\Pi = \frac{-\zeta c + 3cp}{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}.$$

Cum autem ſemper ſit $\zeta\zeta > 3\eta$ et $\eta\eta > 3\zeta\theta$, concinnius hic valor ita exprimetur:

$$\Pi = \frac{\zeta c - 3cp}{\eta\eta - 3\zeta\theta + (9\theta - \zeta\eta)p + (\zeta\zeta - 3\eta)pp}.$$

§. 29. Quia poſitio axis penitus arbitrio noſtro relinquitur, eum ſemper ita aſſumere licet, vt vnam cuſpidem tangat, tum vero ibi fiet $p = \infty$, vnde ſolutio noſtra non minus late patebit, etiamſi ponamus $\alpha = \infty$; tum vero erit

$$\zeta = \alpha,\ \eta = \alpha(\beta + \gamma) \text{ et } \theta = \alpha\beta\gamma;$$

hincque propterea

$$\eta\eta - 3\zeta\theta = \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma);$$

$$9\theta - \zeta\eta = 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta + \gamma) = -\alpha\alpha(\beta + \gamma) \text{ et}$$

$$(\zeta\zeta - 3\eta) = \alpha\alpha - 3\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\alpha.$$

Suma-

Sumatur igitur $c = \alpha a$, vt numerator etiam per $\alpha\alpha$ fiat diuiſibilis, eritque formula noſtra

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma) p + pp},$$

cuius denominator certe nullum habet factorem realem, niſi ſit $\beta = \gamma$, quem caſum autem ipſa rei natura reſpuit. Hoc autem valore pro Π aſſumto conſequimur ſtatim

$$u = \frac{d\,\Pi}{d\,p} = \frac{a(\beta + \gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma) p + pp)^2} \text{ et}$$

$$t = pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma - \gamma\gamma) + 2a(\beta + \gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma) p + pp)^2}.$$

§. 30. Vt iam hinc cuſpides definiamus, pro prima cuſpide ponamus $p = \infty$, eritque tam $t = 0$, quam $u = 0$. Pro ſecunda cuſpide ſumamus $p = \beta$, eritque abſciſſa

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } u = -\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Pro tertia vero cuſpide fiat $p = \gamma$, et erit

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } u = +\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Tab. II. Fig. 10. Hinc in figura erit $GB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$,

$$AH = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } HC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

§. 31. Ductis iam chordis AB, AC et BC erit

$$AB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} \text{ et}$$

$$AC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}.$$

Pro tertia chorda BC cum ſit

$$BC^2 = (BG + HC)^2 + GH^2 = \frac{4aa + aa(\beta + \gamma)^2}{(\beta - \gamma)^6}$$

hinc erit

$$BC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2},$$

ſicque tres iſtae chordae AB, AC et BC eandem inter ſe

ſe tenebunt rationem, quam habent hae tres formulae radicales:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1};\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1};\ \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

Pro poſitione autem harum chordarum notetur eſſe tangens ang. B A G $= \frac{1}{2\beta-\gamma}$ et tang. ang. C A H $= \frac{1}{\beta-2\gamma}$; vnde colligitur tangens anguli B A C

$$= \frac{3\beta-3\gamma}{2\beta\beta-5\beta\gamma+2\gamma\gamma-1}.$$

Pro tertia chorda erit tang. anguli A O C =

$$\text{tang. } BOG = \frac{BG+CH}{CH} = \frac{2}{\beta+\gamma}.$$

Cum igitur ſit A B C = G O B − G A B erit

tang. A B C $= \frac{3\beta-3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)+2}$. Denique, ob anguli C O G tang. = − tang. ang. B O G $= -\frac{2}{\beta+\gamma}$, quia eſt ang. A C B = C O G − C A O, erit tang. A C B $= \frac{3\gamma-3\beta}{(\beta+\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$.

§. 32. Statuamus exempli gratia $\beta = 2$ et $\gamma = 1$ eritque A G $= 3a$, et A H $= 0$, tum vero G B $= a$ et H C $= a$, vnde curua figuram habebit, qualis fig. 11. repraeſentatur, in qua ergo ſi capiatur punctum quodcunque u, cuius coordinatae ſunt A T et T U, erit Tab. II. Fig. 11.

$$t = \frac{3a-6ap+3app}{(2-3p+pp)^2} \text{ et } u = \frac{3a-2ap}{(2-3p+pp)^2}.$$

Hic in ramo A U C id punctum notatu eſt dignum, quod a recta A C maxime diſtat; hoc igitur manifeſto ibi erit, vbi eius tangens ad axem eſt normalis, ideoque hoc loco erit $p = 0$, vnde fit A T $= \frac{3}{4}a$, quae eſt diſtantia maxima quaeſita U S; tum vero erit T U $= u = \frac{3}{4}a$. Quia porro tang. angul. G A B $= \frac{1}{3}$, in arcu A B id punctum a chorda A B maxime erit remotum, cuius tangens chordae A B eſt parallela; pro eo ergo reperitur $p = 3$, vn-

de fit $AT = t = \frac{4}{3}a$ et $TU = u = -\frac{1}{3}a$. Ex hoc exemplo autem luculenter patet, quemadmodum omnes caſus euolui conueniat; neque vero difficile erit, hinc eiusmodi curuas triangulares inuenire, quae dato triangulo ABC ſint inſcriptibiles, quandoquidem ex ratione laterum trianguli innoteſcit ratio harum formularum:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1};\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1};\ \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

§. 33. Sint terna latera AB, AC et BC inter ſe vt numeri A, B, C, ac ponatur

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = nA,\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1} = nB \text{ et } \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2} = nC;$$

vnde ſumtis quadratis fit

$$(2\beta-\gamma)^2 = nnAA-1;\ (\beta-2\gamma)^2 = nnBB-1 \text{ et } (\beta+\gamma)^2 = nnCC-4,$$

vnde fit

$$1^\circ.\ 2\beta-\gamma = \sqrt{nnAA-1};\ 2^\circ.\ \beta-2\gamma = \sqrt{nnBB-1} \text{ et } \beta+\gamma = \sqrt{nnCC-4},$$

quarum prima dempta ſecunda praebet

$$\sqrt{nnAA-1} - \sqrt{nnBB-1} = \sqrt{nnCC-4},$$

ex qua aequatione quantitatem n definire oportet, qua inuenta reperietur

$$3\beta = \sqrt{nnAA-1} + \sqrt{nnCC-4} \text{ et}$$
$$3\gamma = \sqrt{nnCC-4} - \sqrt{nnBB-1};$$

quibus inuentis curua triangularis ſatisfaciens per formulas ſuperiores facile determinatur; ex illa autem aequatione elicitur

$$nn = \frac{4(2AA + 2BB - CC)}{2AABB + 2AACC + 2BBCC - A^4 - B^4 - C^4}.$$

Vnde ſi trianguli, cuius latera ſunt A, B et C, area vocetur Δ, hic denominator erit $= 16\Delta\Delta$, ita vt ſit

$$nn = \frac{2AA + 2BB - CC}{4\Delta\Delta}.$$

Hoc autem valore inuento erit

$$\text{I. } \sqrt{nnAA - 1} = \frac{3AA + BB - CC}{4\Delta};$$

$$\text{II. } \sqrt{nnBB - 1} = \frac{3BB + AA - CC}{4\Delta} \text{ et}$$

$$\text{III. } \sqrt{nnCC - 4} = \frac{2AA - 2BB}{4\Delta};$$

ex his vero denique elicitur

$$3b = \frac{5AA - BB - CC}{4\Delta} \text{ et } 3\gamma = \frac{AA - 5BB + CC}{4\Delta},$$

ita vt iam omnia ſint determinata, quae ad ſolutionem huius problematis ſpectant. Propoſito ſcilicet quocunque triangulo rectilineo, ſemper curua triangularis deſcribi poteſt, cuius cuſpides in eius angulos incidant, et latera trianguli ſimul ſint chordae arcuum, quibus figura triangularis conſtat.

§. 34. Ecce igitur, Problematis, cui tota haec inveſtigatio erat deſtinata, concinnam ſolutionem ſubiungamus.

Problema.

Intra datum triangulum A B C curuam triangularem continuam et algebraicam inſcribere, cuius ſingulae cuſpides in ipſos angulos trianguli A, B et C incidant. Tab. II. Fig. 12.

Solutio.

I°. Vocentur latera trianguli dati

$$BC = a,\ AC = c \text{ et } AB = b,$$

ſitque area huius trianguli $= \Delta$, ita vt ſit

$$16\Delta\Delta = 2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4,$$

ſiue

$$16\Delta\Delta = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a);$$

tum ſingula latera trianguli biſecentur in punctis a, b et c et rectae Aa, Bb, Cc, quae ſe mutuo in centro grauitatis trianguli O interſecabunt, erunt tangentes curuae triangularis in ſuis cuſpidibus A, B et C. Iam, ſumta recta Aa pro axe, ponatur anguli BOa cotangens $= \beta$ et anguli COa cotangens $= -\gamma$, atque ex formulis ante inuentis, ſcribendo loco litterarum A, B et C has minuſculas b, c et a, colligitur

$$\beta = \frac{5bb - aa - cc}{12\Delta} \text{ et } \gamma = \frac{aa + bb - 5cc}{12\Delta},$$

ita vt ſit

$$\beta + \gamma = \frac{bb - cc}{2\Delta}.$$

II°. Nunc capiatur

$$\Pi = \frac{k}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp},$$

vnde fiet

$$u = \frac{k(\beta+\gamma) - 2kp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2};$$

tum vero

$$t = pu - \Pi = \frac{-k(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma) + 2k(\beta+\gamma)p - 3kpp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2},$$

vbi t et u ſunt coordinatae pro curua triangulari quaeſita. Sumto enim eius puncto quocunque U, indeque demiſſo

in

in axem Aa perpendiculo UT, erit AT $= t$ et TU $= u$. Tantum igitur ſupereſt, vt quantitas k ita determinetur, vt curua triangularis tota intra triangulum A B C cadat, ſimulque eius cuſpides in angulos ipſos A, B et C incidant; ſponte autem prima cuſpis in punctum A incidit, quia ſumto $p = \infty$ fit tam $t = 0$ quam $u = 0$.

III°. Pro ſecunda igitur cuſpide, quae in punctum B cadere debet, aſſumamus $p = \beta$, quo facto fiet

$$t = \frac{-k(\beta-\gamma)(2\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^4} = \frac{k(2\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^3} \text{ et}$$

$u = \frac{-k}{(\beta-\gamma)^3}$. Neceſſe igitur eſt vt fiat

$tt + uu = bb$, vnde fit

$\frac{kk(2\beta-\gamma)^2 - kk}{(\beta-\gamma)^6} = bb$, ideoque $k = \frac{b(\beta-\gamma)^3}{\sqrt{((2\beta-\gamma)^2+1)}}$.

IV°. Eſt vero

$$\beta-\gamma = \frac{2(bb+cc)-aa}{6\Delta} \text{ et } 2\beta-\gamma = \frac{5bb+cc-aa}{4\Delta},$$

hinc igitur erit

$$(2\beta-\gamma)^2 + 1 = \frac{2b^4+2bbcc-aabb}{4\Delta\Delta},$$

hinc

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = \frac{b\sqrt{(2bb+2cc-aa)}}{2\Delta},$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperitur

$$k = \frac{(2bb+2cc-aa)^{\frac{5}{2}}}{108\Delta\Delta},$$

qua quantitate cognita adepti ſumus aequationem algebraicam pro curua triangulari, inſcribenda triangulo A B C, quam deſideramus.

Corollarium.

Ex tali autem curua triangulari facillime innumerabiles curuae orbiformes formari poſſunt. Poſitis enim coordinatis curuae orbiformis x et y, ſumi poterit

$$x = u + \frac{ep}{\surd(1+pp)} \text{ et } y = t - \frac{e}{\surd(1+pp)},$$

quae ergo etiam erit algebraica; neque vero illa curua triangularis huius erit euoluta, ſed potius cum omnibus his curuis orbiformibus communem habebit euolutam, quae itidem erit curua triangularis, ſimulque rectificabilis.

DE MENSURA ANGULORUM SOLIDORUM.

Auctore
L. EULER.

§. 1.

Quemadmodum anguli plani menſurantur per arcus circulares eos ſubtendentes, ſi ſcilicet vertex anguli in centro circuli collocatur: ita naturae rei conſentaneum videtur, angulos ſolidos per portiones ſuperficiei ſphaericae metiri, quae eos quaſi ſubtendant. ſi vertex anguli in centro ſphaerae collocatur. Ita ſi angulus ſolidus ex tribus angulis, qui ſint a, b, c, fuerit formatus, et circa verticem ſphaera deſcribatur, cuius radius vnitate exprimatur, menſura huius anguli ſolidi rite ſtatuetur areae trianguli ſphaerici aequalis, cuius latera ſint illis angulis a, b et c aequalia; quandoquidem haec latera ſunt menſurae iſtorum angulorum planorum. Eodem modo ſi angulus ſolidus ex quatuor vel pluribus angulis planis fuerit formatus, eius menſura erit area quadrilateri ſphaerici, vel polygoni plurium laterum, cuius ſcilicet ſingula latera aequentur angulis planis, quibus angulus ſolidus componitur. Hac igitur ratione dimenſio angulorum ſolidorum reducitur ad inueſtigationem areae trianguli ſphaerici, vel polygoni plurium late-

laterum, cuius latera fuerint data. Cum igitur area cuiusque trianguli ſphaerici facillime ex eius angulis cognoſcatur, quemadmodum iam dudum ab acutiſſimo Geometra *Alberto Girardo* eſt demonſtratum, hanc ipſam demonſtrationem, quoniam non inuulgus ſatis nota videtur, hic apponam.

Lemma.

Tab. II. Fig. 13. §. 2. *Area portionis ſphaericae, inter duos meridianos, angulo* α *inuicem inclinatos, contenta, ſe habet ad ſuperficiem totius ſphaerae, vt angulus* α *ad* 360°. Sint A C B et A D B duo ſemicirculi maximi in ſuperficie ſphaerica, ſe mutuo in polis oppoſitis A et B ſecantes, et inuicem inclinati angulo C A D vel C B D $= \alpha$, et euidens eſt, aream huius ſectoris ſphaerici A C B D A toties contineri in ſuperficie ſphaerae tota, quoties angulus α continetur in 360 gradibus.

§. 3. Quod ſi ergo radius ſphaerae ponatur $= r$, quia ſuperficies totius ſphaerae eſt $= 4\pi rr$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$, erit area noſtri ſectoris ſphaerici $= 4\pi rr.\frac{\alpha}{360^\circ}$, ſi quidem angulus α in gradibus exprimatur; at ſi α detur in partibus radii, qui ſemper vnitate exprimatur, ob $360^\circ = 2\pi$ erit area ſectoris ſphaerici $= 2\alpha rr$; vnde ſi radius ſphaerae pariter vnitati aequalis ſtatuatur, iſta area erit $= 2\alpha$. Hoc igitur modo area iſtius ſectoris per ſimplicem angulum repraeſentari poterit, dum tota ſuperficies eſt $= 4\pi$.

Theo-

Theorema

Alberti Girardi.

§. 4. *Area trianguli ſphaerici ſemper aequalis eſt angulo, quo ſumma omnium trium angulorum trianguli ſphaerici excedit duos angulos rectos.*

Demonſtratio.

Sit A B C triangulum ſphaericum propoſitum, cuius area quaeritur, eiusque anguli denotentur literis α, β, γ. Iam primo latera A B et A C in ſuperficie ſphaerica producuntur, donec ſibi mutuo iterum occurrant in polo a, ipſi angulo A oppoſito, et quia hi arcus A B a et A C a tanquam duo meridiani ſpectari poſſunt, a ſe inuicem angulo α diſtantes, erit area iſtius ſectoris A C a B $= 2\alpha$. Deinde eodem modo bina latera B A et B C continuentur vsque in b, quod punctum itidem erit polus, ipſi B oppoſitus, huiusque ſectoris B A b C area erit $= 2\beta$ Denique producantur etiam latera C A et C B vsque in polum ipſi C oppoſitum in c, eritque iſtius ſectoris C B c A area $= 2\gamma$. Hinc igitur ſi area trianguli A B C quaeſita vocetur $= S$, innoteſcent areae ſequentium triangulorum: Tab. II. Fig. 14.

I°. a B C $= 2\alpha - S$
II°. b A C $= 2\beta - S$
III°. c A B $= 2\gamma - S$.

§. 4 Quia nunc puncta a, b, c in ſuperficie ſphaerae punctis A, B et C e diametro ſunt oppoſita, inter ſe etiam easdem tenebunt diſtantias, etiamſi in figura longe aliter videatur. Hinc ductis arcubus ab, bc, ca, erit

 $ab =$

$ab = AB$, $ac = AC$ et $bc = BC$; vnde et huius trianguli abc, in regione ſphaerae poſteriore ſiti, area quoque erit $= S$; ita vt iam tota ſuperficies ſphaerae contineat 1°. triangula $ABC = S$ et $abc = S$; 2°. triangula $aBC = 2\alpha - S$, $bAC = 2\beta - S$ et $cAB = 2\gamma - S$. Praeterea vero figura continet triangula abC, acB et bcA, quorum poſteriorum areae ex ſuperioribus innoteſcunt; namque pro triangulo abC primo eſt latus $ab = AB$, latus $aC = Ac$ et $bC = Bc$; vnde manifeſto hoc triangulum $abC = ABc = 2\gamma - S$. Eodem modo intelligitur fore triangulum $acB = ACb = 2\beta - S$; ac denique $bcA = BCa = 2\alpha - S$.

§. 5. Quare cum tota ſphaerae ſuperficies hic diſſecta ſit in octo triangula, quorum ſingulorum areas hic exhibuimus, earum ſumma aequalis eſſe debet toti ſuperficiei ſphaerae $= 4\pi$; ex qua aequalitate area quaeſita S definiri poterit. Singula igitur haec triangula cum ſuis areis conſpectui exponamus:

I. $ABC = S$	III. $aBC = 2\alpha - S$	VI. $Abc = 2\alpha - S$
II. $abc = S$	IV. $bAC = 2\beta - S$	VII. $Bac = 2\beta - S$
	V. $cAB = 2\gamma - S$	VIII. $Cab = 2\gamma - S$

Summa $= 2S + 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3S + 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3S$

vnde omnium octo triangulorum ſumma colligitur $= 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4S$, quae ergo aequalis eſſe debet 4π, vnde per quatuor diuidendo oritur $\alpha + \beta + \gamma - S = \pi$, ideoque $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, vbi $\alpha + \beta + \gamma$ eſt ſumma omnium angulorum trianguli propoſiti, et π eſt menſura duorum rectorum, ſiue 180°, ſicque area trianguli ſphaeri-

ci

ci propoſiti reperitur, ſi a ſumma omnium angulorum $\alpha + \beta + \gamma$ duo recti ſeu 180°. ſubtrahantur, prorſus vti Theorema declarat.

§. 6. Totum ergo negotium pro menſura angulorum ſolidorum huc reducitur: vt ex datis ternis lateribus trianguli ſphaerici eius area definiatur; quamobrem ſequens Problema reſoluendum ſuſcipiamus.

Problema generale.

Datis in triangulo ſphaerico ternis lateribus $AB = c$, $AC = b$ *et* $BC = a$, *inueſtigare aream huius trianguli ſphaerici.* Tab. II. Fig. 15.

Solutio.

§. 7. Denotent literae A, B, C angulos huius trianguli, ponaturque eius area quam quaerimus $= S$, ac modo vidimus fore $S = A + B + C - 180°$. Hinc ergo erit $\text{ſin.}\, S = -\,\text{ſin.}\,(A + B + C)$ et $\text{coſ.}\, S = -\,\text{coſ.}\,(A + B + C)$, hincque $\text{tang.}\, S = +\,\text{tang.}\,(A + B + C)$; ſicque tantum opus eſt, vt loco angulorum A, B, C latera a, b, c in calculum introducantur. At vero per praecepta trigonometriae ſphaericae anguli ex datis lateribus ita definiuntur, vt ſit:

$$\text{coſ.}\, A = \frac{\text{coſ.}\, a - \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, c}; \quad \text{coſ.}\, B = \frac{\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, c};$$

$$\text{coſ.}\, C = \frac{\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, b};$$

vnde porro deducuntur ſinus eorundem angulorum

$$\text{ſin.}\, A = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\, a^2 - \text{coſ.}\, b^2 - \text{coſ.}\, c^2 + 2\,\text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, c)}}{\text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, c};$$

$$\text{ſin.}\, B = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\, a^2 - \text{coſ.}\, b^2 - \text{coſ.}\, c^2 + 2\,\text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, b\, \text{coſ.}\, c)}}{\text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, c};$$

$$\text{ſin. } C = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ. } a^2 - \text{coſ. } b^2 - \text{coſ. } c^2 + 2\,\text{coſ. } a\,\text{coſ. } b\,\text{coſ. } c)}}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b};$$

vbi loco radicalis ponamus

$$\sqrt{(1 - \text{coſ. } a^2 - \text{coſ. } b^2 - \text{coſ. } c^2 + 2\,\text{coſ. } a\,\text{coſ. } b\,\text{coſ. } c)} = k$$

et ad calculum contrahendum pro numeratoribus ſtatuamus

$$\text{coſ. } a = \alpha,\ \text{coſ. } b = \beta \text{ et } \text{coſ. } c = \gamma,$$

vt ſit

$$kk = 1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\alpha\beta\gamma.$$

Hoc facto erit

$$\text{coſ. } A = \frac{\alpha - \beta\gamma}{\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c};\ \text{coſ. } B = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } c};\ \text{coſ. } C = \frac{\gamma - \alpha\beta}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b};$$

$$\text{ſin. } A = \frac{k}{\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c};\ \text{ſin. } B = \frac{k}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } c};\ \text{ſin. } C = \frac{k}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b}.$$

§. 8. Coniungamus nunc primo angulos A et B ac reperiemus

$$\text{ſin. }(A+B) = \text{ſin. } A\,\text{coſ. } B + \text{coſ. } A\,\text{ſin. } B = \frac{k(1-\gamma)(\alpha+\beta)}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c^2};$$

$$\text{coſ. }(A+B) = \text{coſ. } A\,\text{coſ. } B - \text{ſin. } A\,\text{ſin. } B = \frac{(\alpha - \beta\gamma)(\beta - \alpha\gamma) - kk}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c^2}.$$

Quod ſi nunc tertium angulum C coniungamus, erit

$$\text{ſin. }(A+B+C) = \text{ſin. } A\,\text{coſ. } B\,\text{coſ. } C + \text{ſin. } B\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } C + \text{ſin. } C\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } B - \text{ſin. } A\,\text{ſin. } B\,\text{ſin. } C;$$

$$\text{coſ. }(A+B+C) = \text{coſ. } A\,\text{coſ. } B\,\text{coſ. } C - \text{coſ. } A\,\text{ſin. } B\,\text{ſin. } C - \text{coſ. } B\,\text{ſin. } A\,\text{ſin. } C - \text{coſ. } C\,\text{ſin. } A\,\text{ſin. } B.$$

Tantum igitur ſupereſt, vt in his formulis loco literarum maiuſcularum A, B, C, valores modo aſſignati ſubſtituantur.

Prima Inueſtigatio,
pro ſin. S.

§. 9. Cum ſit ſin. $S = -$ ſin. $(A + B + C)$, erit

$$\text{ſin. } S = \text{ſin. } A\,\text{ſin. } B\,\text{ſin. } C - \text{ſin. } A\,\text{coſ. } B\,\text{coſ. } C - \text{ſin. } B\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } C - \text{ſin. } C\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } B,$$

quae

quae expreſſio cum conſtet quatuor membris, ſingula ſeorſim euoluamus. Erit igitur:

I. ſin. A ſin. B ſin. C $= \frac{k^3}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\alpha\beta\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$;

II. ſin. A coſ. B coſ. C $= \frac{k(\beta - \alpha\gamma)(\gamma - \alpha\beta)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(\beta\gamma - \alpha\beta\beta - \alpha\gamma\gamma + \alpha\alpha\beta\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$;

III. ſin. B coſ. A coſ. C $= \frac{k(\alpha - \beta\gamma)(\gamma - \alpha\beta)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(\alpha\gamma - \beta\alpha\alpha - \beta\gamma\gamma + \beta\beta\alpha\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$;

IV. ſin. C coſ. A coſ. B $= \frac{k(\alpha - \beta\gamma)(\beta - \alpha\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(\alpha\beta - \gamma\alpha\alpha - \gamma\beta\beta + \gamma\gamma\alpha\beta)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$.

Quia ergo vbique idem habetur denominator

$$\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2 = (1 - \alpha\alpha)(1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma),$$

tria membra poſteriora, in vnam ſummam collecta, dabunt

$$\frac{k(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta\beta - \alpha\gamma\gamma - \beta\gamma\gamma - \alpha\alpha\beta - \alpha\alpha\gamma - \beta\beta\gamma + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{(1 - \alpha\alpha)(1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma)}$$

§. 10. Ad has formulas tractabiliores reddendas ponamus breuitatis gratia:

$$\alpha + \beta + \gamma = p;\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = q \text{ et } \alpha\beta\gamma = r,$$

hincque erit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = pp - 2q,$$

vnde fit

$$kk = 1 - pp + 2q + 2r.$$

Deinde cum ſit

$$pq = \alpha\alpha\beta + \alpha\alpha\gamma + \beta\beta\alpha + \beta\beta\gamma + \gamma\gamma\alpha + \gamma\gamma\beta + 3\alpha\beta\gamma,$$

erit

$$\alpha\alpha(\beta + \gamma) + \beta\beta(\alpha + \gamma) + \gamma\gamma(\alpha + \beta) = pq - 3r,$$

quibus valoribus ſubſtitutis terna poſteriora membra iunctim praebent $\frac{k(q - pq + 3r + pr)}{(1 - \alpha\alpha)(1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma)}$, quae ſumma, a primo membro $= \frac{k(1 - pp + 2q + 2r)}{(1 - \alpha\alpha)(1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma)}$ ſubtracta, relinquit id quod quaerimus, ſcilicet:

$$\sin. S = \frac{k(1 + q - r - pp + pq - pr)}{(1 - \alpha\alpha)(1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma)};$$

vbi obſeruaſſe iuuabit, quia, poſito $\alpha = 1$, denominator euaneſcit, eodem caſu quoque numeratorem euaneſcere debere, quod idem quoque euenire debet caſibus $\beta = 1$ et $\gamma = 1$, ita vt numerator neceſſario habeat factores $1 - \alpha$; $1 - \beta$; $1 - \gamma$, quorum productum cum ſit $1 - p + q - r$, per hoc ſimul numerator erit diuiſibilis, et diuiſione facta quotus reperitur $= 1 + p$; denominator vero, per eundem diuiſorem diuiſus, fit

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) = 1 + p + q + r,$$

ſicque reſultat iſta formula:

$$\text{ſin. } S = \frac{k(1 + p)}{1 + p + q + r},$$

ſiue valoribus reſtitutis

$$\text{ſin. } S = \frac{(1 + \alpha + \beta + \gamma)\sqrt{(1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\alpha\beta\gamma)}}{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)},$$

vbi denotat α, coſ. a; β, coſ. b; γ, coſ. c. Hancque formulam operae pretium erit aliquot exemplis illuſtrare.

§. 11. *Exemplum primum.* Sint latera b et c quadrantes, ita vt ſit $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, eritque ſin. $S = \sqrt{(1 - \alpha\alpha)}$, ideoque ſin. $S =$ ſin. a, conſequenter ipſa area $S = a$. Quando autem ambo latera A B et A C ſunt quadrantes et latus B C $= a$, tum ambo anguli B et C erunt recti, et ob coſ. A $= \alpha =$ coſ. a, erit angulus A $= a$, hincque ſumma omnium angulorum $= 180° + a$, ideoque area quaeſita $S = a$.

§. 12. *Exemplum ſecundum.* Sit triangulum ſphaericum A B C ad A rectangulum, et cum ex ſphaericis ſit coſ. B C $=$ coſ. A B coſ. A C, erit coſ. $a =$ coſ. b coſ. c, ideoque $\alpha = \beta\gamma$; quo valore ſubſtituto prodibit:

ſin. S

$\text{ſin. } S = \frac{(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)\sqrt{(1-\beta\beta-\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma)}}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)} = \frac{\sqrt{(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}}{1+\beta\gamma}.$
Cum igitur ſit $\sqrt{(1-\beta\beta)} = \text{ſin. } b$, et $\sqrt{(1-\gamma\gamma)} = \text{ſin. } c$, erit pro area trianguli rectanguli

$$\text{ſin. } S = \frac{\text{ſin. } b \text{ ſin. } c}{1+\text{coſ. } b \text{ coſ. } c} = \frac{\text{ſin. } b \text{ ſin. } c}{1+\text{coſ. } a}.$$

§. 13. *Exemplum tertium.* Si triangulum fuerit aequilaterum, ſeu $\alpha = \beta = \gamma$, eius area ita exprimetur vt ſit $\text{ſin. } S = \frac{(1+3\alpha)\sqrt{(1-3\alpha^2+2\alpha^3)}}{(1+\alpha)^3}$, vbi formula radicalis factores habet $(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$, vnde ergo fiet

$$\text{ſin. } S = \frac{(1+3\alpha)(1-\alpha)\sqrt{(1+2\alpha)}}{1+\alpha^2}.$$

Hinc ſi terna latera fuerint quadrantes, ideoque $\alpha = 0$, erit ſin. $S = 1$, ideoque $S = \frac{\pi}{2}$.

§. 14. *Exemplum quartum.* Sint omnia latera trianguli, a, b, c quam minima, quo caſu triangulum ſphaericum abit in triangulum planum, et cum ſit

$$\alpha = \text{coſ. } a = 1 - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{24}a^4 - \text{etc.},$$

ſimilique modo

$\beta = 1 - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{24}b^4 - \text{etc.}$ et $\gamma = 1 - \frac{1}{2}cc + \frac{1}{24}c^4 - \text{etc.}$, factor rationalis noſtrae formulae fiet $= \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$, neglectis ſcilicet partibus minimis. At in formula irrationali non ſolum partes finitae ſe mutuo deſtruunt, ſed etiam termini, vbi a, b, c habent duas dimenſiones; quamobrem ſingulas partes vsque ad quatuor dimenſiones euolui oportet. Habebimus ergo vt ſequitur:

$\alpha\alpha = 1 - aa + \frac{1}{3}a^4$	$\alpha\beta = 1 - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{24}a^4 + \frac{1}{24}b^4 + \frac{1}{4}aabb$, ideoque
$\beta\beta = 1 - bb + \frac{1}{3}b^4$	$\alpha\beta\gamma = 1 - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc + \frac{1}{24}a^4 + \frac{1}{24}b^4 + \frac{1}{24}c^4$
$\gamma\gamma = 1 - cc + \frac{1}{3}c^4$	$+ \frac{1}{4}aabb + \frac{1}{4}aacc + \frac{1}{4}bbcc.$

Hinc

Hinc igitur colligitur quantitas poſt ſignum radicale vt ſequitur

$$-2+aa+bb+cc-\tfrac{1}{3}a^4-\tfrac{1}{3}b^4-\tfrac{1}{3}c^4$$
$$+2-aa-bb-cc+\tfrac{1}{12}a^4+\tfrac{1}{12}b^4+\tfrac{1}{12}c^4$$
$$+\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc,$$

quae, deletis terminis ſe deſtruentibus, reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc-\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{1}{4}b^4-\tfrac{1}{4}c^4.$$

Quare cum etiam area S ſit quam minima, ideoque ſin. S = S, habebimus aream quaeſitam:

$$S=\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc-\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{1}{4}b^4-\tfrac{1}{4}c^4)},$$

ſiue

$$S=\tfrac{1}{4}\sqrt{(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)},$$

quae eſt formula notiſſima pro area trianguli plani.

Inueſtigatio ſecunda,

pro coſinu S.

§. 15. Cum ſit coſ. S = − coſ. (A + B + C), erit

coſ. S = coſ. A ſin. B ſin. C + coſ. B ſin. A ſin C
+ coſ. C ſin. A ſin. B − coſ. A coſ. B coſ C,

quae quatuor membra ſeorſim euoluta dabunt:

I. $\text{coſ. A ſin. B ſin. C} = \frac{kk(\alpha-\beta\gamma)}{\text{ſin. }a^2\,\text{ſin. }b^2\,\text{ſin. }c^2}$;

II. $\text{coſ. B ſin. A ſin. C} = \frac{kk(\beta-\alpha\gamma)}{\text{ſin. }a^2\,\text{ſin. }b^2\,\text{ſin. }c^2}$;

III. $\text{coſ. C ſin. A ſin. B} = \frac{kk(\gamma-\alpha\beta)}{\text{ſin. }a^2\,\text{ſin. }b^2\,\text{ſin. }c^2}$.

Pro termino poſtremo erit primo

$$\text{coſ. A coſ. B} = \frac{(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\alpha\gamma)}{\text{ſin. }a\,\text{ſin. }b\,\text{ſin. }c^2} = \frac{\alpha\beta-\alpha\alpha\gamma-\beta\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\gamma}{\text{ſin. }a\,\text{ſin. }b\,\text{ſin. }c^2},$$

hincque

$$\text{coſ.A coſ.B coſ.C} = \frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha\gamma\gamma-\beta\beta\gamma\gamma+\alpha\beta\gamma^3+\alpha\gamma\beta^3+\beta\gamma\alpha^3-\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\text{ſin. }a^2\,\text{ſin. }b^2\,\text{ſin. }c^2}.$$

§. 16. Quod ſi iam iterum ponamus $\alpha+\beta+\gamma=p$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q$ et $\alpha\beta\gamma=r$, tria membra priora, in vnam ſummam collecta, dabunt $\frac{kk(p-q)}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2}$; vltimum autem membrum, ſi hoc modo repraeſentetur:

$$\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha\gamma\gamma-\beta\beta\gamma\gamma+\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)-\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2},$$

ob $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=pp-2q$ et

$$\alpha\alpha\beta\beta+\alpha\alpha\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma=qq-2pr,$$

induet hanc formam:

$$\frac{r-qq+2pr+ppr-2qr-rr}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2}.$$

Quare cum ſit $kk=1-pp+2q+2r$, omnibus membris collectis habebimus:

$$\cos.S=\frac{(p-q)(1-pp+2q+2r)-r+qq-2pr-ppr+2qr+rr}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2},$$

quae formula euoluta fit

$$\cos.S=\frac{p-q-r+2pq+ppq-ppr-qq+rr-p^3}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2}.$$

§. 17. Quia hic iterum denominator euaneſcit caſibus quibus $\alpha=1$, $\beta=1$ et $\gamma=1$, neceſſe eſt vt iisdem caſibus etiam numerator euaneſcat, ideoque iſtum factorem habeat:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-p+q-r.$$

Facta igitur hac diuiſione pro numeratore nanciſcemur hunc quotum: $p-q-r+pp$; pro denominatore autem quotus erit:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=1+p+q+r,$$

ſicque nacti ſumus iſtam expreſſionem:

$$\cos.S=\frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r};$$

ac, pro literis p, q et r reſtitutis valoribus, erit

$$\text{coſ.}\, S = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

ſiue etiam

$$\text{coſ.}\, S = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

§. 18. *Exemplum primum.* Sint duo latera *b* et *c* quadrantes, ideoque $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, quo ergo caſu prodibit coſ. $S = \frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha} = \alpha =$ coſ. *a*; conſequenter erit iterum vt ſupra $S = a$.

§. 19. *Exemplum ſecundum.* Sit triangulum ſphaericum rectangulum, exiſtente angulo A recto, eritque, vti ſupra vidimus, coſ. *a* = coſ. *b* coſ. *c*, ſiue $\alpha = \beta\gamma$, quo valore ſubſtituto reperitur:

$$\text{coſ.}\, S = \frac{\beta+\gamma+2\beta\gamma+\beta\beta+\gamma\gamma+\beta\beta\gamma+\beta\gamma\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)}, \text{ ſiue}$$

$$\text{coſ.}\, S = \frac{\beta+\gamma(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)} = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}.$$

Pro eodem vero caſu ſupra inuenimus $S = \frac{\sqrt{(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}}{1+\beta\gamma}$, quod egregie congruit, cum hinc fiat

$$\text{ſin.}\, S^2 + \text{coſ.}\, S^2 = \frac{1+2\beta\gamma+\beta\beta\gamma\gamma}{(1+\beta\gamma)^2} = 1.$$

§. 20. *Exemplum tertium.* Sit triangulum aequilaterum, ſiue $\alpha = \beta = \gamma$, eritque coſ. $S = \frac{3\alpha+6\alpha\alpha-\alpha^3}{(1+\alpha)^3}$. Supra autem inuenimus pro hoc caſu

$$\text{ſin.}\, S = \frac{(1+3\alpha)(1-\alpha)\sqrt{(1+2\alpha)}}{1+\alpha^3};$$

ad quarum expreſſionum conſenſum oſtendendum ſumamus vtriusque formulae quadratum, ac prodibit:

$$\text{coſ.}\, S^2 = \frac{9\alpha\alpha+36\alpha^3+30\alpha^4-12\alpha^5+\alpha^6}{(1+\alpha^6)} \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\, S^2 = \frac{(1+6\alpha+9\alpha\alpha)(1-3\alpha\alpha+2\alpha^3)}{(1+\alpha)^6} = \frac{1+6\alpha+6\alpha\alpha-16\alpha^3-15\alpha^4+18\alpha^5}{(1+\alpha)^6};$$

qua-

quarum fractionum ſumma praebet

$$\frac{1+6\alpha+15\alpha\alpha+20\alpha^3+15\alpha^4+6\alpha^5+\alpha^6}{(1+\alpha)^6}=1.$$

§. 21. *Exemplum quartum.* Sint latera trianguli quam minima, et quia etiam area quaſi fit euaneſcens, erit coſ. $S=1-\frac{1}{2}SS$; hinc ex formula, per literas p, q, r expreſſa, erit $1-\frac{1}{2}SS=\frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r}$, vnde colligitur.

$$SS=\frac{2+4q+4r-2pp}{1+p+q+r}.$$

et reſtitutis pro p, q, r valoribus fiet

$$SS=\frac{2kk}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

vbi in denominatore pro literis α, β, γ ſufficit ſcribere vnitatem, quo facto denominator erit 8. Supra vero vidimus, pro numeratore fieri $k=\surd(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)$

$$=\surd(\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc-\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{1}{4}b^4-\tfrac{1}{4}c^4),$$

quo valore poſito reperitur

$$SS=\frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}{16},$$

vnde fit vtique

$$S=\tfrac{1}{4}\surd(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4.)$$

Tertia inueſtigatio,

pro tang. S et tang. ½ S.

§. 22. Poſtquam pro area noſtri trianguli ſphaerici tam ſin. S quam coſ. S inuenimus, ſponte ſe prodit tangens iſtius areae, ſcilicet:

$$\text{tang. } S=\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)\surd(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma},$$

quam formulam ſuccinctius in genere exprimere non licet.

§. 23. Verum tangens dimidiae areae, ſiue tang. $\frac{1}{2}$S, multo concinnius exprimi poterit. Cum enim ſit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}S = \frac{\text{ſin.}\,S}{1+\text{coſ.}\,S},$$

retineamus initio literas p, q et r, ita vt pro numeratore habeamus

$$\text{ſin.}\ S = \frac{(1+p)\surd(1-pp+2q+2r)}{1+p+q+r},$$

at vero pro denominatore, ob

$$\text{coſ.}\ S = \frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r},\ \text{erit}$$

$$1+\text{coſ.}\ S = \frac{(1+p)^2}{1+p+q+a};$$

quare his valoribus ſubſtitutis reperitur

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}S = \frac{\surd(1-pp+2q+2r)}{1+p},$$

et reſtitutis valoribus,

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}S = \frac{\surd(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}{1+\alpha+\beta+\gamma};$$

quae formula ad vſum vtique eſt aptiſſima.

§. 24. *Exemplum primum.* Si bina latera b et c fuerint quadrantes, ideoque $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, erit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}S = \frac{\surd(1-\alpha\alpha)}{1+\alpha} = \frac{\text{ſin.}\,a}{1+\text{coſ.}\,a};$$

vnde manifeſtum eſt fore tang. $\frac{1}{2}$S = tang. $\frac{1}{2}a$, ideoque $S = a$, vti iam ſupra inuenimus.

§. 25. *Exemplum ſecundum.* Sit triangulum ſphaericum ad A rectangulum, ideoque coſ. a = coſ. b coſ. c et $\alpha = \beta\gamma$; hoc autem valore ſubſtituto reperitur

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}S = \frac{\surd(1-\beta\beta-\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma)}{1+\beta+\gamma+\beta\gamma} = \frac{\surd((1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma))}{(1+\beta)(1+\gamma)},$$

quae fractio, ſupra et infra diuidendo per $\surd(1+\beta)(1+\gamma)$, reducitur ad hanc:

tang.

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)}}.$$

Eſt vero

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-\text{coſ.}\,b}{1+\text{coſ.}\,b}} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b,$$

ſimilique modo $\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} = \text{tang.}\ \frac{1}{2} c$; quocirca reſultat ſequens formula maxime memorabilis:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} S = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} b.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} c,$$

cuius conſenſus cum ſupra inuentis haud difficulter oſtenditur.

§. 26. *Exemplum tertium.* Si triangulum fuerit aequilaterum, ſiue $\alpha = \beta = \gamma$, erit

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} S = \frac{\sqrt{(1-3\alpha\alpha+2\alpha^3)}}{1+3\alpha} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{(1+2\alpha)}}{1+3\alpha};$$

vnde caſu, quo ſingula latera ſunt quadrantes, ideoque $\alpha = 0$, erit $\text{tang.}\ \frac{1}{2} S = 1$, ideoque $\frac{1}{2} S = 45^\circ$ et $S = \frac{\pi}{2}$.

§. 27. *Exemplum quartum.* Sint denique tria latera a, b, c, quam minima, et quia

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{2} S,\ \text{erit}\ S = \frac{2\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma)}}{1+\alpha+\beta+\gamma}.$$

Nunc igitur pro denominatore ſufficit ſumi $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, ita vt Coefficiens formulae radicalis ſit $= \frac{1}{2}$; ipſam autem formulam radicalem iam ſupra aliquoties vidimus eſſe

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2} aabb + \tfrac{1}{2} aacc + \tfrac{1}{2} bbcc - \tfrac{1}{4} a^4 - \tfrac{1}{4} b^4 - \tfrac{1}{4} c^4)},$$

vnde area prorſus vt ante exprimitur.

Problema.

§. 28. *Propoſito angulo ſolido* $AOBC$, *ex tribus angulis planis* $BOC = a$, $AOC = b$ *et* $AOB = c$ *formatum, eius veram menſuram aſſignare.* Tab. II. Fig 16.

Solutio.

Quoniam huius anguli ſolidi menſura ſtatui poteſt aequalis areae trianguli ſphaerici, cuius latera ſint a, b, c, radio ſpaerae exiſtente $= 1$, ex praecedentibus intelligitur, angulos ſolidos, perinde ac planos, ſiue per gradus et minuta, ſiue per arcus circulares exprimi poſſe. Ponamus igitur S exprimi menſuram anguli ſolidi propoſiti, ac poſito breuitatis gratia.

$$\text{coſ.}\, a = \alpha,\ \text{coſ.}\, b = \beta,\ \text{coſ.}\, c = \gamma,$$

triplici modo iſta menſura S aſſignari poterit; primo enim erit per ſinus:

$$\text{ſin.}\, S = \frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)};$$

deinde per coſinus:

$$\text{coſ.}\, S = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

tertio vero commodiſſime per tangentem ſemiſſis:

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} S = \frac{\sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}}{1+\alpha+\beta+\gamma}.$$

Vbi imprimis notaſſe iuuabit, ſi omnes tres anguli a, b, c fuerint recti, tum menſura anguli ſolidi prodire $= 90°$; id quod mirifice conuenit cum communi loquendi more, dum huiusmodi anguli ſolidi etiam ab opificibus anguli recti vocari ſolent; ex quo ſimul intelligere licet, quinam anguli ſiue maiores ſiue minores angulo recto ſint reputandi.

Scholion I.

§. 29. Egregium foret, ſi iſta angulorum ſolidorum menſura etiam ad eiusmodi eximias proprietates perduceret, quales pro figuris planis locum habent; veluti: quod ſumma angulorum planorum aequalis eſt duobus rectis.

ctis. Interim tamen talis proprietas in figuris ſolidis neutiquam occurrit, ratione noſtrae menſurae. Neque enim in omnibus Tetraëdis, quae quatuor conſtant angulis ſolidis, ſumma omnium angulorum ſolidorum eandem quantitatem conſtituit, ſed prouti Tetraëdra magis minusue obliqua conſtruuntur, ſumma quatuor angulorum ſolidorum modo maior modo minor fieri poteſt. Si enim Tetraëdron regulare examini ſubiiciamus, cuius ſinguli anguli ſolidi ex ternis angulis planis ſexaginta graduum formantur, habebimus $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$; vnde cuiusque anguli ſolidi menſura ita reperitur, vt ſit tang. $\frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{2}}{5}$, vnde ex tabulis colligitur

$$\tfrac{1}{2} S = 15^\circ.\ 48', \text{ ſiue } S = 31^\circ.\ 36',$$

ideoque ſumma omnium quatuor angulorum huius Tetraëdri erit $126^\circ.\ 24'$. Nunc conſideremus Pyramidem triangularem, cuius baſis itidem ſit triangulum aequilaterum, vertex autem deſinat in cuſpidem acutiſſimam, cuius itaque menſura euaneſcat; pro ternis autem angulis ſolidis ad baſin vnus angulus erit $a = 60^\circ$, bini vero reliqui $b = c = 90^\circ$, ita vt ſit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \text{ et } \beta = \gamma = 0; \text{ vnde prodit}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \text{tang. } 30^\circ, \text{ ita vt ſit } S = 60;$$

vnde huius Pyramidis ſumma omnium angulorum ſolidorum erit 180°, cum ante pro Tetraëdro fuiſſet tantum 126°. Quanquam autem in ſumma angulorum ſolidorum cuiusque ſolidi nulla inſignis proprietas elucet, in aliis fortaſſe relationibus iſta menſura proprietates haud contemnendas patefacere poterit.

Scholion II.

§. 30. Quae hactenus ſunt tradita ad menſuram eorum angulorum ſolidorum ſpectant, qui ex tribus tantum

tum angulis planis ſunt compoſiti. At ſi angulus ſolidus ex quatuor pluribusue angulis planis fuerit formatus, eius menſura erit area quadrilateri ſphaerici, vel polygoni plurium laterum, cuius ſingula latera aequentur angulis planis ſolidum conſtituentibus. Tum igitur nihil aliud opus eſt, niſi vt tale Polygonum in triangula ſphaerica reſoluatur, et ſingulorum areae inueſtigentur, quippe quorum ſumma dabit menſuram anguli ſolidi. His autem caſibus non ſufficit ſingulos angulos planos tantum noſſe, ſed inſuper neceſſe eſt, vt inclinatio mutua binorum pluriumue ſit cognita. Haec cum ſatis ſint manifeſta, hic tantum adiungam dimenſionem angulorum ſolidorum regularium, qui ex quotcunque angulis, planis inter ſe aequalibus et pariter inclinatis, formentur.

Problema.

§. 31. *Si angulus ſolidus componatur ex* n *angulis planis inter ſe aequalibus, qui ſinguli ſint* = a, *et aequaliter inter ſe inclinentur, inuenire menſuram huius anguli ſolidi.*

Solutio.

Si huic angulo ſolido ſphaera concipiatur circumſcripta, cuius radius = 1, eius menſura erit Polygonum regulare ſphaericum, cuius omnia latera erunt = a, eorumque numerus = n; et quia etiam omnes anguli inter ſe erunt aequales, Polygonum erit regulare, ideoque in eius
Tab. II. medio dabitur eius centrum, quod ſit in O; vnum vero
Fig. 17. quodque latus Poligoni ſit latus A B = a, ex cuius terminis ad O ducantur arcus A O et B O, qui erunt inter ſe aequales, vt habeatur triangulum A O B. Quia igitur nume-

numerus talium triangulorum eſt $= n$, erit

$$\text{angulus } AOB = \frac{2\pi}{n};$$

at ſi area totius Polygoni ſtatuatur $= S$, quae ſimul erit menſura anguli propoſiti, area iſtius trianguli AOB erit $= \frac{S}{n}$. Iam ex O in latus AB ducatur normalis OP, latus AB biſceans, eritque $AP = \frac{1}{2}a$, et

$$\text{angulus } AOP = \frac{\pi}{n}.$$

Vocetur iam angulus $OAB = \Phi$, eritque ex ſphaericis

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{\text{coſ. } \frac{\pi}{n}}{\text{coſ. } \frac{1}{2}a}.$$

Quia igitur huic angulo Φ etiam aequalis eſt angulus OBA, ſumma angulorum trianguli AOB erit $= 2\Phi + \frac{2\pi}{n}$, vnde ablatis duobus rectis obtinebitur area trianguli AOB

$$\frac{S}{n} = 2\Phi + \frac{2\pi}{n} - \pi,$$

hincque area totius Polygoni

$$S = 2n\Phi + 2\pi - n\pi = 2n\Phi - (n-2)\pi,$$

quae ergo erit menſura anguli ſolidi regularis propoſiti.

Corollarium I.

§. 32. Si igitur angulus ſolidus conſtet ex tribus angulis planis aequalibus $= a$, ob $n = 3$, erit

$$\text{ſin. } \Phi = \frac{\text{coſ. } 60^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2}a};$$

quo angulo inuento erit menſura anguli ſolidi

$$S = 6\Phi - \pi = 6\Phi - 180^\circ.$$

Corollarium II.

§. 33. Si angulus ſolidus ex quatuor conſtet angulis planis inter ſe aequalibus $= a$, ob $n = 4$ quaeratur.

 angu-

angulus Φ, vt ſit $\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\text{coſ. } 45^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2} a}$; atque hinc reperietur menſura anguli ſolidi $S = 8\,\Phi - 2\,\pi = 8\,\Phi - 360^\circ$.

Corollarium III.

§. 34. Si angulus ſolidus conſtet ex quinque angulis planis inter ſe aequalibus $= a$, ob $n = 5$ quaeratur angulus Φ, vt ſit $\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\text{coſ. } 36^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2} a}$; hinc vero menſura iſtius anguli ſolidi erit $S = 10\,\Phi - 3\,\pi = 10\,\Phi - 540^\circ$.

Corollarium IV.

§. 35. Si angulus ſolidus ex ſex conſtet angulis planis inter ſe aequalibus $= a$, ob $n = 6$ quaeratur angulus Φ, vt ſit $\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\text{coſ. } 30^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2} a}$; tum vero menſura huius anguli ſolidi erit $S = 12\,\Phi - 4\,\pi = 12\,\Phi - 720^\circ$.

Scholion.

§. 36. Secundum haec praecepta computemus angulos ſolidos quinque corporum regularium, quo facilius eos cum angulo recto, qui in ſolidis pariter eſt 90 graduum, comparare valeamus; vbi quidem conueniet angulos ſolidos minores quam 90° nomine acutorum, qui autem excedunt 90° nomine obtuſorum inſignire.

Menſura angulorum ſolidorum Tetraëdri.

§. 37. Cum hic terni anguli plani 60 graduum concurrant ad angulos ſolidos conſtituendos, erit $\frac{1}{2} a = 30^\circ$, et $n = 3$;

$n = 3$; vnde ſecundum corrollarium I. calculus per logarithmos ita inſtituetur:

$$l \operatorname{coſ.} 60° = 9,6989700$$
$$l \operatorname{coſ.} 30° = 9,9375306$$
$$l \operatorname{ſin.} \Phi = 9,7614394$$
$$\text{hincque } \Phi = 35°.\ 15'.\ 52''$$
$$\text{ergo } 6\,\Phi = 211°.\ 35'.\ 12''$$

vnde quisque angulus ſolidus Tetraëdri reperietur

$$S = 31°.\ 35'.\ 12'';$$

ſicque hic angulus vix ſuperat trientem anguli recti.

Menſura angulorum ſolidorum Octaëdri.

§. 38. Cum quilibet angulus componatur ex quaternis angulis planis 60 graduum, erit $\frac{1}{2}a = 30°$, et $n = 4$; vnde ſecundum praecepta corollarii II calculus per logarithmos inſtituatur, vti ſequitur:

$$l \operatorname{coſ.} 45° = 9,8494850$$
$$l \operatorname{coſ.} 30° = 9,9375306$$
$$l \operatorname{ſin.} \Phi = 9,9119544$$

hincque erit $\Phi = 54°.\ 44'.\ 8''$, ergo $8\,\Phi = 437°.\ 53'.\ 4''$; vnde anguli ſolidi Octaëdri menſura erit $S = 77°.\ 53'.\ 4''$, qui ergo angulus non multum a recto deficit. Caeterum hic angulus Φ eſt complementum praecedentis ad 90°.

Menſura angulorum ſolidorum
Icoſaëdri.

§. 39. Cum hic angulus ſolidus ex quinis angulis planis $a = 60°$ componatur, erit $\frac{1}{2}a = 30°$ et $n = 5$; vnde ex coroll. 3 calculum ita inſtitui oportet:

$$l\,\text{coſ.}\ 36° = 9,9079576$$
$$l\,\text{coſ.}\ 30 = 9,9375306$$
$$l\,\text{ſin.}\ \Phi = 9,9704270$$

vnde colligitur $\Phi = 69°.\ 5'.\ 41\frac{1}{2}''$, ergo $10\,\Phi = 690°.\ 56'.\ 55''$; hinc anguli ſolidi Icoſaëdri menſura erit $S = 150°.\ 56'.\ 55''$, qui ergo angulus iam valde eſt obtuſus.

Menſura angulorum ſolidorum
Hexaëdri.

§. 40. Cum hic ſinguli anguli ſolidi conſtent ternis angulis planis rectis, erit $a = 90°$, $\frac{1}{2}a = 45°$, et $n = 3$; hinc ex Coroll. 1. calculus iſta inſtituatur:

$$l\,\text{coſ.}\ 60° = 9,6989700$$
$$l\,\text{coſ.}\ 45° = 9,8494850$$
$$l\,\text{ſin.}\ \Phi = 9,8494850$$

ideoque fit $\Phi = 45°$, ergo $6\,\Phi = 270°$; vnde menſura anguli ſolidi Hexaëdri erit $90°$, ſcilicet hic angulus ipſe eſt rectus.

Menſura angulorum ſolidorum
Dodecaëdri.

§. 41. Cum hic quilibet angulus conſtet ex ternis

nis planis, quorum ſinguli continent 108°, erit $\frac{1}{2}a = 54°$, et $n = 3$; vnde calculus ſecundum coroll. 1. ita inſtitui debet:

$$\begin{array}{l} l\,\text{coſ.}\,60° = 9,6989700 \\ l\,\text{coſ.}\,54° = 9,7692187 \\ \hline l\,\text{ſin.}\,\Phi = 9,9297513 \end{array}$$

hincque erit ipſe angulus

$$\Phi = 58°.\,16'.\,57'', \text{ ergo } 6\,\Phi = 349°.\,41'.\,425''.$$

Menſura igitur anguli ſolidi Dodecaëdri erit 169°. 41′. 42″; ſicque hic angulus Dodecaëdri inter omnia corpora regularia eſt maximus.

Scholion.

§. 42. Quodſi angulus ſolidus formetur ex ſex angulis planis $a = 60°$, vt ſit $\frac{1}{2}a = 30°$ et $n = 6$, corpus regulare inde ortum eſt ipſa ſphaera, in cuius ſuperficie omnes anguli ſolidi in planum ſunt depreſſi, ſicque aequivalebunt quatuor angulis rectis; id quod etiam calculus ſecundum Coroll. 4. inſtitutus declarat:

$$\begin{array}{l} l\,\text{coſ.}\,30° = 9,9375306 \\ l\,\text{coſ.}\,30 = 9,9375306 \\ \hline l\,\text{ſin.}\,\Phi = 10,000000 \end{array}$$

hincque angulus

$$\Phi = 90° \text{ et } 12\,\Phi = 1080°,$$

vnde fit angulus ſolidus $S = 360°$. Idem euenit ſi angulus ſolidus ex quatuor planis rectis componatur, vt ſit $\frac{1}{2}a = 45$ et $n = 4$; tum enim erit

$$ſin.\ \Phi = \frac{coſ.\ 45^\circ}{coſ.\ 45^\circ} = 1,\ \text{ideoque}\ \Phi = 90^\circ,$$

et angulus ſolidus $S = (8 - 4)\,90 = 360^\circ$. Denique ſi angulus ſolidus conſtet ex tribus planis, ita vt ſit

$$a = 120^\circ,\ \text{erit}\ \tfrac{1}{2}a = 60^\circ\ \text{et}\ n = 3;$$

vnde iterum fit

$$ſin.\ \Phi = \frac{coſ.\ 60^\circ}{coſ.\ 60^\circ} = 1,\ \text{ideoque}\ \Phi = 90^\circ,$$

et angulus ſolidus $S = (6 - 2)\,90 = 360^\circ$.

AD DISSERTATIONEM DE REDVCTIONE FORMVLARVM INTEGRALIVM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE, ADDITAMENTVM.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

In priori de hoc argumento Diſſertatione in id praecipue intenti fuimus, vt oſtenderemus qua ratione formularum differentialium

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}},\ \text{ſiue}\ dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$$

integralia per rectificationem Sectionum Conicarum, Ellipſeos nimirum et Hyperbolae, expediri queant; ea autem occaſione nobis non licuit eas formulas differentiales contemplari, quae per idoneas ſubſtitutiones ad formulas modo commemoratas reduci poſſunt, quarum igitur nunc mentionem injicere conſtituimus. Priusquam autem id negotium adgrediamur Theorematibus noſtris, §§ 7 et 8. Diſſertationis commemoratae allatis, nonnullas quoque alias memoratu admodum dignas et ex prioribus facili opera deducendas, adiiciamus.

§. 2.

§. 2. Theorema (V.)

$$\int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$
$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)} + \int \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}.$$

Nam per Theorema (II.) eſt:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e'\,\text{coſ.}\,\Phi+e'^2)}}{(1+e'\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{(e'+\text{coſ.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e'\,\text{coſ.}\,\Phi+e'^2)}}{(e'^2-1)\,\text{ſin.}\,\Phi\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\Phi)}$$
$$+ \frac{1}{e'^2-1} \cdot \int \frac{d\Phi\,(e'+\text{coſ.}\,\Phi)^2}{\text{ſin.}\,\Phi^2 \sqrt{(1+2e'\,\text{coſ.}\,\Phi+e'^2)}},$$

hinc ſi ponatur $e' = \frac{1}{e}$, fiet:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1-e^2)\,\text{ſin.}\,\Phi\,(e+\text{coſ.}\,\Phi)}$$
$$+ \frac{1}{1-e^2} \cdot \int \frac{d\Phi\,(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{\text{ſin.}\,\Phi^2 \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}};$$

deinde ſi ſtatuatur $e' = e$ et ſumma ambarum aequationum ſumatur, prodibit omnino:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$
$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)} + \int \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}.$$

Idem autem ſic ſatis expedite demonſtratur:

$$d.\frac{\text{ſin.}\,\Phi \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{coſ.}\,\Phi}\, d.\, \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}$$
$$+ \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}\, d.\, \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{coſ.}\,\Phi}$$
$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}$$
$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + d\Phi \frac{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2-(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2)}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}$$
$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2} - \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}},$$

vnde conſtat propoſitum.

§. 3. Theorema (VI)

$$e^2 \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$
$$= \frac{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ſin.}\,\Phi\,(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ}\,\Phi+e^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi^2}.$$

Nam

Nam ſi ad aequationem Theoremate (II) expreſſam et per e^2 multiplicatam, addatur illa, quam §. praecedenti expoſuimus:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1-e^2)(e+\text{coſ.}\,\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}$$
$$+\frac{1}{1-e^2}\cdot\int\frac{d\Phi(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{\text{ſin.}\,\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}$$

prodibit aequalitas Theoremate hoc (VI) expoſita. Deinde quia per Theorema (III) eſt

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e'\,\text{coſ.}\,\Phi+e'^2)}}{(1+e'\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{e'^2}{e'^2-1}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\Phi\,(e'+\text{coſ.}\,\Phi)}{(1+e'\,\text{coſ.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e'\,\text{coſ.}\,\Phi+e'^2)}}$$
$$-\frac{1}{e'^2-1}\int\frac{d\Phi\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(1+2e'\,\text{coſ.}\,\Phi+e'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ſi ſtatuatur $e'=\frac{1}{e}$, fiet

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{1}{1-e^2}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\Phi\,(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}$$
$$-\frac{e^2}{1-e^2}\int\frac{d\Phi\,(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ad quam ſi addatur

$$e^2\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)} = -\frac{e^4}{1-e^2}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\Phi\,(e+\text{coſ.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}$$
$$+\frac{e^2}{1-e^2}\int\frac{d\Phi\,(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

prodibit:

$$e^2\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}+\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$
$$=\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)}\cdot\frac{((1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2-e^4(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2)}{(1-e^2)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}$$
$$+e^2\int\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(1+e^2)\,\text{ſin.}\,\Phi\,(e+\text{coſ.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)} + \frac{\text{ſin.}\,\Phi^3}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)\,\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}$$

$$+ e^2 \int \frac{d\Phi\,\text{ſin}\,\Phi^2}{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ſiue etiam

$$e^2 \int d\Phi \frac{\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{e^2\,\text{ſin.}\,\Phi\,(e+\text{coſ.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)} + \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)(e+\text{coſ.}\,\Phi)}$$

$$+ e^2 \int \frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qua aequalitate Theorema noſtrum (VII) continetur.

§. 4. Nunc vero facile perſpicitur, caſus differentialis noſtri I, III, IX et X, etiam ope Theorematum (VI) et (VII) ad rectificationem Ellipſeos et Hyperbolae reduci poſſe. Et quidem ſi quaeratur, quomodo formulam $dz\frac{Z}{Z'}$ comparatam eſſe oportet, vt ſit $= d\Phi \frac{\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{\text{ſin.}\,\Phi^2}$, primum ſubſtitutione vtamur $z = \frac{\lambda(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}$, ita vt eſſe debeat

$$Z = \mu \frac{\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{\text{ſin.}\,\Phi} \text{ et } Z' = \mu' \frac{(e+\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi};$$

erit vero tum

$$dz = -\lambda\,d\Phi \frac{(e+\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi^2} \text{ et}$$

$$Z = \surd(1+mzz) = \frac{\surd(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{\text{ſin.}\,\Phi},$$

exiſtente $\lambda = \frac{1}{\surd m}$, nec non

$$Z' = \surd(nzz+1) = \frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi\,\surd(1-e^2)},$$

poſito $e = \surd\left(\frac{n-m}{n}\right)$, ſiue

$$Z = \surd(nzz-1) = \frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi\,\surd(e^2-1)},$$

poſito

poſito $e = \sqrt{\left(\frac{n+m}{m}\right)}$, ſiue in genere

$$Z' = \sqrt{(nzz \pm 1)} = \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{(e + \text{coſ}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}, \text{ hinc}$$

$$dz\frac{Z}{Z'} = -\frac{d\Phi\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}{\sqrt{n}\,\text{ſin.}\,\Phi}.$$

Caſus igitur I et IX formulae noſtrae per hanc reductionem expedientur. Deinde ſi adhibeatur ſubſtitutio

$$z = \lambda\frac{(e + \text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}, \text{ vt ſit}$$

$$dz = -d\Phi\frac{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi^2}, \text{ erit}$$

$$Z = \mu\frac{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi} \text{ et } Z' = \mu'\frac{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi},$$

ideoque pro Z non niſi haec forma: $\sqrt{(1 + mzz)}$ adhiberi poteſt, ita vt haec ſubſtitutio nouam reductionem non ſuppeditet, id quod etiam inde euadit manifeſtum, ſi loco e introducatur $e' = \frac{1}{e}$; tum enim fiet $z = \lambda e\frac{(1 + e'\,\text{coſ.}\,\Phi)}{\text{ſin.}\,\Phi}$, quae ſubſtitutio cum priori congruit.

§. 5. Igitur iam disquiramus, quomodo formula $dz\frac{Z}{Z'}$ ſit comparata, quando ad hanc expreſſionem:

$$\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

reducenda eſt. Binae autem ſubſtitutiones, quae heic in vſum vocari poſſunt, ſunt

$$z = \frac{\lambda(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}, \text{ vel } z = \frac{\lambda(e + \text{coſ.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}},$$

quas autem nullo negotio pateſcit plane inter ſe congruere. Sit igitur $z = \frac{\lambda(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e)}}$, hinc erit

$$dz = -\frac{\lambda\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,(e + \text{coſ.}\,\Phi)}{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ideoque erit:

$$Z = \frac{\mu \,\text{ſin.}\, \Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu'(e + \text{coſ.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}},$$

vnde mox perſpicitur neceſſum eſſe, vt ſtatuatur

$$Z = \sqrt{(1 - mzz)} = \frac{e\,\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}},$$

poſito $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Tum vero fiet

$$Z' = \sqrt{(nzz \pm 1)} = \sqrt{\frac{n \pm m}{m}} \cdot \frac{e + \text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}},$$

poſito $e = \sqrt{\frac{n \pm m}{n}}$, hincque

$$\sqrt{(nzz \pm 1)} = e\sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \frac{e + \text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}},$$

quare habebimus

$$dz\frac{Z}{Z'} = -\frac{d\Phi.\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{\sqrt{n}(1 + 2e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ſicque Caſus formulae noſtrae III et X per hanc reductionem expediuntur. Et hae quidem reductiones illae ipſae ſunt, per quas integrationes formularum

$$\frac{dz\sqrt{(1 + mzz)}}{z} \text{ et } \frac{dz}{z}\sqrt{(1 - mzz)}$$

in §§ 30 et 31 Diſſertationis praecedentis elicuimus.

§. 6. Inter formulas differentiales, quae ad formam iſtam a nobis propoſitam ſubſtitutione quadam ſe reduci patiuntur, primum occurrit iſthaec: $\frac{dx\sqrt{(1 + mxx)}}{xx\sqrt{(1 + nxx)}}$, pro qua ponere licebit, aut $z = \frac{1}{x}$, aut $z = \frac{\sqrt{(1 + nxx)}}{x}$. Priori adhibita ſubſtitutione eſt

$$\frac{dx}{x^2} = -dz;\ \sqrt{(1 + mxx)} = \frac{\sqrt{(zz + m)}}{z};$$

$$\sqrt{(1 + nxx)} = \frac{\sqrt{(zz + n)}}{z}, \text{ hincque}$$

$$\frac{dx\sqrt{(1 + mxx)}}{x^2\sqrt{(1 + nxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(zz + m)}}{\sqrt{(zz + n)}},$$

quae poſterior forma omnino cum illa a nobis propoſita con-

congruit. Nec ſignorum mutatio heic vllam alterationem producit, quum perinde ſit quo ſigno quantitates m et n afficiantur. Altera ſubſtitutio, qua hic vti licebit, eſt

$$z = \frac{\sqrt{(1+nxx)}}{x}, \text{ vnde colligitur } z^2 x^2 = 1 + nxx,$$

hincque

$$x = \frac{1}{\sqrt{(zz-n)}} \text{ et } \frac{dx}{x^2} = -\frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-n)}},$$

tum vero erit

$$1 + mxx = \frac{zz+m-n}{zz-n} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(zz+m-n)}}{\sqrt{(zz-n)}}, \text{ nec non}$$

$$\sqrt{(1+nxx)} = zx = \frac{z}{\sqrt{(zz-n)}},$$

quapropter denique fiet

$$\frac{dx}{xx}\frac{\sqrt{(1+mxx)}}{\sqrt{(1+nxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(zz+m-n)}}{\sqrt{(zz-n)}}.$$

Vbi quidem perinde eſt, quo ſigno m et n afficiuntur, quin etiam, ſi formula differentialis ita ſit expreſſa:

$$\frac{dx}{xx}\frac{\sqrt{(1\pm mxx)}}{\sqrt{(nxx-1)}},$$

facile perſpiciatur, pro z adhibendam eſſe ſubſtitutionem,

$$z = \frac{\sqrt{(nxx-1)}}{x}, \text{ vnde fiet } x = \frac{1}{\sqrt{(n-zz)}} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1\pm mxx)} = \frac{\sqrt{(n\pm m-zz)}}{\sqrt{(n-zz)}}$$

eritque

$$\frac{dx}{xx}\frac{\sqrt{(1\pm mxx)}}{\sqrt{(nxx-1)}} = \frac{dz\sqrt{(n\pm m-zz)}}{\sqrt{(n-zz)}}.$$

§. 7. Secunda formula, quae heic in cenſum venit, eſt

$$\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}}, \text{ ſiue etiam } \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+mxx)(nxx-1)}},$$

pro qua ſubſtitutione iſta vtamur: $z = \sqrt{(1+nxx)}$, hincque fiet

 $x\,dx =$

$$x\,d\,x = \frac{z\,d\,z}{n};\; x = \frac{\sqrt{(zz-1)}}{\sqrt{n}};\; 1 - mxx = \frac{n-m+mzz}{n} \text{ e}$$

$$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(n-m+mzz)}}{\sqrt{n}},$$

quare erit

$$\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}} = \frac{dz\sqrt{(zz-1)}}{n\sqrt{(n-m+mzz)}}.$$

Tertia formula, quae ſubſtitutione ad formam propoſitam reducitur, eſt

$$\frac{dx}{x^3\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}},\text{ ſiue }\frac{dx}{xx\sqrt{(1+mxx)(nxx-1)}}.$$

Sufficiet autem priorem illarum conſideraſſe, pro qua ponatur $z = \frac{\sqrt{(1+nxx)}}{x}$, eritque $x^2 z^2 = 1 + nxx$, hinc

$$x = \frac{1}{\sqrt{(zz-n)}};\; \frac{dx}{x^3} = -\frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-n)}};$$

$$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(zz+m-n)}}{\sqrt{(zz-n)}};\; \sqrt{(1+nxx)} = zx = \frac{z}{\sqrt{(zz-n)}},$$

quamobrem obtinebimus

$$\frac{dx}{x^3\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(zz-n)}}{\sqrt{(zz+m-n)}}.$$

Pro hac formula ſubſtitutione quoque vti licebit

$$z = \frac{\sqrt{(1+mzz)}}{x},$$

verum hinc conſimilis plane formula oritur, ac ſupra.

§. 8. Quarta formula, ſubſtitutione ad iſtam $dz\frac{Z}{\mathfrak{Z}}$, reducenda, eſt

$$dx\frac{\sqrt{(1+mxx)}}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}},\text{ ſiue } dx\frac{\sqrt{(1+mxx)}}{(nxx-1)^{\frac{3}{2}}},$$

vbi priorem conſideraſſe ſufficiet. Ponatur autem pro illa $z = \frac{1}{\sqrt{(1+nxx)}}$, eritque $1 + nxx = \frac{1}{zz}$, hinc $nxx = \frac{1-zz}{zz}$ et $x = \frac{\sqrt{(1-zz)}}{z\sqrt{n}}$,

porro

porro erit

$$n\,x\,d\,x = -\frac{d\,z}{z^3};\; d\,x = -\frac{d\,z}{z^2\sqrt{n\,(1-z\,z)}},$$

tum vero fiet

$$\sqrt{(1+m\,x\,x)} = \frac{\sqrt{((n-m)\,z\,z+m)}}{z\sqrt{n}},$$

quare denique colligetur

$$d\,x\frac{\sqrt{(1+m\,x\,x)}}{(1+n\,x\,x)^{\frac{3}{2}}} = -\,d\,z\frac{\sqrt{((n-m)\,z\,z+m)}}{n\sqrt{(1-z\,z)}}.$$

Statui autem quoque poteſt

$z = \frac{x}{\sqrt{(1+n\,x\,x)}}$, quo facto erit

$z\,z + n\,z\,z\,x\,x = x\,x$, hincque $x = \frac{z}{\sqrt{(1-n\,z\,z)}}$,

vnde

$$d\,x = \frac{d\,z}{(1-n\,z\,z)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1+m\,x\,x)} = \frac{\sqrt{(1+(m-n)\,z\,z)}}{\sqrt{(1-n\,z\,z)}},$$

quare obtinebimus

$$d\,x\frac{\sqrt{(1+m\,x\,x)}}{(1+n\,x\,x)^{\frac{3}{2}}} = d\,z\frac{\sqrt{(1+(m-n)\,z\,z)}}{\sqrt{(1-n\,z\,z)}},$$

vbi tamen facile vnicuique liquet, hoc z cum iſto in priori formula adhibito non eſſe confundendum.

§. 9. Quinta formula, ſubſtitutione ad formam $d\,z\frac{Z}{Z'}$ reducibilis, eſt

$$\frac{x^2\,d\,x}{(1+n\,x\,x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+m\,x\,x)}}, \text{ ſiue } \frac{x^2\,d\,x}{(n\,x\,x-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+m\,x\,x)}}.$$

Ponatur heic

$z =$

$z = \frac{1}{\sqrt{(1+nxx)}}$, fietque $x = \frac{\sqrt{(1-zz)}}{z\sqrt{n}}$,
$dx = \frac{-dz}{z^2\sqrt{n(1-zz)}}$; $\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{((n-m)zz+m)}}{z\sqrt{n}}$ et

$$\frac{x^2\,dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(1-zz)}}{n\sqrt{((n-m)zz+m)}}.$$

Statui vero quoque poteſt

$$z = \sqrt{\left(\frac{1+mxx}{1+nxx}\right)},$$

vnde colligitur

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-zz}{nzz-m}\right)};\; dx = \frac{(m-n)\,z\,dz}{(nzz-m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-zz)}};$$

$\sqrt{(1+nxx)} = \frac{\sqrt{(n-m)}}{\sqrt{(nzz-m)}}$, hinc

$$(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}$$
$$= (1+nxx)^2\sqrt{\frac{1+mxx}{1+nxx}} = \frac{z(n-m)^2}{(nzz-m)^2},$$

quare obtinebimus

$$-\frac{dz\sqrt{(1-zz)}}{(n-m)\sqrt{(nzz-m)}} = \frac{x^2\,dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}}.$$

§. 10. Sexta demum formula, ad noſtrum differentiale reductionem admittens, eſt

$$\frac{dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}}$$

pro qua adhibeatur ſubſtitutio

$$z = \frac{x}{\sqrt{(1+nxx)}},\text{ vnde } dx = \frac{dz}{(1-nzz)^{\frac{3}{2}}},$$

$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(1+(m-n)zz)}}{\sqrt{(1-nzz)}}$; $x = \frac{z}{\sqrt{(1-nzz)}}$,

ideoque

dx

$$\frac{dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}} = \frac{dz\sqrt{(1-nzz)}}{\sqrt{(1+(m-n)zz)}}.$$

Denique poni poteſt

$$z = \sqrt{\frac{(1+mxx)}{(1+nxx)}}, \text{ hinc } dx = \frac{(m-n)\,z\,dz}{(nzz-m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-zz)}};$$

$$(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)} = \frac{z\,(n-m)^2}{(nzz-m)^2};$$

atque

$$\frac{dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(nzz-m)}}{(n-m)\sqrt{(1-zz)}}.$$

§. 11. Et hae quidem ſunt formulae differentiales, quae ſubſtitutione facta immediate ad formam differentialis propoſiti reducuntur. Praeter has vero plurimae aliae dantur, quarum integratio ad integrale formulae propoſitae reducitur, ſi ad illud addatur quantitas quaepiam algebraica, vel etiam quarum integratio bina integralia formae propoſitae inuoluit. Poſterioris generis hoc eſt differentiale:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}, \text{ quippe quod}$$

$$= \frac{dz(1+mzz)}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}} - \frac{mzzdz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$$

$$= dz\frac{\sqrt{(1+mzz)}}{\sqrt{(1+nzz)}} - \frac{mzzdz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}},$$

vbi prius differentiale iam formae eſt propoſitae, poſterius autem ad illam reducitur ope ſubſtitutionis §. 7 adhibitae. Tum vero erit quoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}} = \frac{n\,dz\sqrt{(1+mzz)}}{(n-m)\sqrt{(1+nzz)}}$$

$$-\frac{m\,dz\sqrt{(1+nzz)}}{\sqrt{(1+mzz)}},$$

vbi vtrumque differentiale iam formae eſt propoſitae, et vlteriori reductione non indiget.

§. 12. Patet igitur formulam $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$ ſemper quidem ad binas huiusmodi formulas:

$$dz\sqrt{\left(\frac{1+mzz}{1+nzz}\right)}$$

eſſe reducibilem, adeoque eius integrationem per rectificationem Sectionum Conicarum facile expediri poſſe. Verum tamen huiusmodi reductione inſtituta, vix primo intuitu liquet, hoc integrale arcum tam Hyperbolicum, quam Ellipticum inuoluere; quare operae omnino pretium erit, in huius formulae integrationem directe inquirere, cui inſtituto exſequendo Theorema noſtrum (V) adprime vtile erit. Primum autem eo ueniet, vt ſingulos caſus huius formulae expendamus, qui ob litteras m, n permutabiles non niſi hi numerantur:

$$\text{I. } \frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}; \quad \text{II. } \frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1-nzz)}};$$

$$\text{III. } \frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(nzz-1)}}; \quad \text{IV. } \frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(1-nzz)}};$$

$$\text{V. } \frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}}.$$

§. 13. Primum igitur formula

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}} \text{ ad formam } \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,coſ.\,\Phi+e^2)}}$$

reducitur, ſtatuendo $z = \frac{\lambda\, ſin.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi}$, vnde colligitur

$$dz = \frac{\lambda\, d\Phi\,(e+coſ.\,\Phi)}{(1+e\,coſ.\,\Phi)^2},$$

tumque ſi ſtatuatur

$$\sqrt{(1+mzz)} = \frac{\mu\sqrt{(1+2e\,coſ.\,\Phi+e^2)}}{1+e\,coſ.\,\Phi}, \text{ erit}$$

$$\sqrt{(1+nzz)} = \frac{\mu'(e+coſ.\,\Phi)}{1+e\,coſ.\,\Phi}.$$

Habe-

Habebimus vero

$$\sqrt{(1+mzz)} = \frac{\sqrt{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)}}{1+e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi},$$

poſito $m\lambda^2 = 1$, ſiue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$, tumque fiet

$$\sqrt{(1+nzz)} = \frac{e+\mathrm{coſ}.\,\Phi}{1+e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi},$$ ſi ſtatuatur $e^2 = \frac{m+n}{m}$,

hincque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}} = \frac{d\Phi}{\sqrt{m}\sqrt{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)}}.$$

Praeterea ſi ponatur

$$\sqrt{(1+nzz)} = \frac{\sqrt{(1+2e'\,\mathrm{coſ}.\,\psi+e'^2)}}{1+e'\,\mathrm{coſ}.\,\psi},$$

fiet $n\lambda^2 = 1$, ſiue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tumque

$$\sqrt{(1+mzz)} = \frac{e'+\mathrm{coſ}.\,\psi}{1+e'\,\mathrm{coſ}.\,\psi},$$ poſito $e'^2 = \frac{m+n}{n}$, vnde fit

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)(1+nzz)}} = \frac{d\psi}{\sqrt{n}\sqrt{(1+2e'\,\mathrm{coſ}.\,\psi+e'^2)}}.$$

Caeterum facile quoque intelligitur, loco ſubſtitutionis

$z = \frac{\lambda\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{1+e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi}$ heic adhiberi poſſe $z = \frac{\lambda\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{e+\mathrm{coſ}.\,\Phi}$;

reductiones autem inde deriuandas cum ſupra allatis prorſus conuenire, niſi quod valores pro e inuerſi ſint illorum, quos ſupra attulimus.

§. 14. Pro formula $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1-nzz)}}$ ad iſtam formam $\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)}}$ reducenda, ſtatuatur

$$z = \frac{\lambda(e+\mathrm{coſ}.\,\Phi)}{\sqrt{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)}},$$ hinc

$$dz = \frac{\lambda\,d\Phi\,\mathrm{ſin}.\,\Phi\,(1+e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi)}{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quapropter ſi ponatur

$$\sqrt{(1-nzz)} = \frac{\mu\,\mathrm{ſin}.\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)}}$$ fiet

$$\sqrt{(1+mzz)} = \frac{\mu'(1+e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi)}{\sqrt{(1+2e\,\mathrm{coſ}.\,\Phi+e^2)}}.$$

Eſt vero

$$\sqrt{(1-nzz)} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}},$$

ſi ponatur $n\lambda^2 = 1$, ſiue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$; tumque fiet

$$1+mzz = \frac{1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2+\frac{m}{n}(e^2+2e\,\text{coſ.}\Phi+\text{coſ.}\Phi^2)}{1+2e\,\text{coſ.}+e^2} =$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2\,\text{coſ.}\Phi^2)}{1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2}+\frac{e^2\,\text{ſin.}\Phi^2-\frac{m}{n}\,\text{ſin.}\Phi^2+\frac{m}{n}e^2\,\text{ſin.}\Phi^2}{1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2}.$$

Hinc ſi ponatur

$$e^2\frac{(n+m)}{n} = \frac{m}{n},\ \text{ſeu}\ e^2 = \frac{m}{n+m},\ \text{erit}$$

$$\sqrt{(1+mzz)} = \frac{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)\sqrt{(1+\frac{m}{n})}}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}} = \frac{\sqrt{m}}{e\sqrt{n}}\cdot\frac{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}},$$

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1-nzz)}} = \frac{-e\,d\Phi}{\sqrt{m}\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{-d\Phi}{\sqrt{(m+n)}\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}}.$$

Caeterum patet, heic pro z ſubſtitui quoque poſſe

$$\frac{\lambda(1+e\,\text{coſ.}\Phi)}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}},$$

verum reductio hinc oriunda cum priori prorſus conſentiens eſt.

§. 15. Nunc ſi formula

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(nzz-1)}}\ \text{ad formam}\ \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}}$$

reduci debeat, ponatur

$$z = \frac{\lambda\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}}{e+\text{coſ.}\Phi},\ \text{vnde fiet}$$

$$dz = \frac{\lambda\,d\Phi\,\text{ſin.}\Phi\,(1+e\,\text{coſ.}\Phi)}{(e+\text{coſ.}\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\Phi+e^2)}}.$$

Quare ſi ſtatuatur

$$\sqrt{(nzz-1)} = \frac{\mu\,\text{ſin.}\Phi}{e+\text{coſ.}\Phi},\ \text{erit}$$

$$\surd(1 + mzz) = \frac{\lambda(1 + e\,cof.\,\Phi)}{e + cof.\,\Phi}; \text{ atque eſt}$$

$$nzz - 1 = \frac{n\lambda^2(1 + 2e\,cof.\,\Phi + e^2) - (e^2 + 2e\,cof.\,\Phi + cof.\,\Phi^2)}{(e + cof.\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{fin.\,\Phi^2}{(e + cof.\,\Phi)^2}, \text{ poſito } n\lambda^2 = 1,$$

vnde fiet

$$1 + mzz = \frac{(e + cof.\,\Phi)^2 + \frac{m}{n}(1 + 2e\,cof.\,\Phi + e^2)}{(e + cof.\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 + \frac{m}{n})(1 + e\,cof.\,\Phi)^2}{(e + cof.\,\Phi)^2} + \frac{fin.\,\Phi^2(e^2 - 1 + \frac{m}{n}e^2)}{(e + cof.\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{(n + m)(1 + e\,cof.\,\Phi)^2}{n(e + cof.\,\Phi)^2}$$

ſi ponatur

$$e^2 = \frac{n}{n + m}, \text{ ſeu } e = \frac{\surd n}{\surd n + m}, \text{ vnde}$$

$$\surd(1 + mzz) = \frac{(1 + e\,cof.\,\Phi)}{e(e + cof.\,\Phi)}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{dz}{\surd(1 + mzz)(nzz - 1)} = \frac{\lambda e\,d\Phi}{\surd(1 + 2e\,cof.\,\Phi + e^2)}$$

$$= \frac{d\Phi}{\surd(n + m)\surd(1 + 2e\,cof.\,\Phi + e^2)}.$$

Tum autem heic ſubſtitutione quoque

$$z = \frac{\lambda\surd(1 + 2e\,cof.\,\Phi + e^2)}{(1 + e\,cof.\,\Phi)},$$

vti licebit, verum reductio, inde deducenda, ad priorem redire cenſenda eſt.

§. 16. Pro formula IV $\frac{dz}{\surd(1 - mzz)(1 - nzz)}$ ad formam iſtam propoſitam reducenda, ſtatuatur

$$z = \lambda\frac{(e + cof.\,\Phi)}{1 + e\,cof.\,\Phi}, \text{ hinc } dz = \lambda\frac{(e^2 - 1)\,d\Phi\,fin.\,\Phi}{(1 + e\,cof.\,\Phi)^2}.$$

Quare ſi ponatur

$$\surd(1 - nzz) = \frac{\mu\,fin.\,\Phi}{1 + e\,cof.\,\Phi}, \text{ erit}$$

$$\surd(1 - mzz) = \mu'\frac{\surd(1 + 2e\,cof.\,\Phi + e^2)}{1 + e\,cof.\,\Phi}.$$

Eſt vero

$$1 - nzz = \frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2 - n\lambda^2(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = \frac{(1-e^2)\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2},$$

poſito $n\lambda^2 = 1$; tum autem fiet

$$1 - mzz = \frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2 - \frac{m}{n}(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$

$$= \left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2\left(\frac{m}{n}-e^2\right)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2},$$

ex quo, ſi ſtatuatur $\frac{m}{n} = e^2$. prodibit

$$1 - mzz = (1-e^2)\frac{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2},$$

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(1-nzz)}} = \frac{-\lambda\,d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}} = \frac{-d\Phi}{\sqrt{n}\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}.$$

Caeterum ſubſtitutio $z = \frac{\lambda(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{e+\text{coſ.}\,\Phi}$, ad easdem perducet concluſiones, quod etiam oppido liquet, ſi poſterior valor ipſius e prioris ſtatuatur inuerſus.

§. 17. Pro formula (V) $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}}$, ponatur $z = \frac{\lambda\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{coſ.}\,\Phi}$, eritque

$$dz = \frac{\lambda\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}};\ \sqrt{(nzz-1)} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{e+\text{coſ.}\,\Phi},$$

poſito $n\lambda^2 = 1$; tum vero erit

$$1 - mzz = \frac{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2 - \frac{m}{n}(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$

$$= \left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \frac{\text{ſin}\,\Phi^2\left(e^2-1-\frac{m}{n}e^2\right)}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}.$$

Hinc ſi ſtatuatur $e^2\left(1-\frac{m}{n}\right) = 1$, ſiue $e^2 = \frac{n}{n-m}$, prodibit

$$\sqrt{(1-mzz)} = \frac{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}{e(e+\text{coſ.}\,\Phi)},$$

ideo-

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}} = \frac{\lambda e\, d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = \frac{d\Phi}{\sqrt{(n-m)}\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Patet autem, hanc reductionem locum habere non poſſe, niſi ponatur $n > m$; quare ſi fuerit $m > n$, loco formulae allatae iſta adhibeatur:

$$\frac{dz}{\sqrt{(mzz-1)(1-nzz)}},$$ tumque ſi ſtatuatur

$$z = \frac{\lambda'\sqrt{(1+2e'\cos.\psi+e'^2)}}{e'+\cos.\psi} \text{ et } \sqrt{(mzz-1)} = \frac{\sin.\psi}{e'+\cos.\psi},$$

fiet

$$\sqrt{(1-nzz)} = \frac{1+e'\cos.\psi}{e'(e'+\cos.\psi)}, \text{ poſito } e' = \sqrt{\frac{m}{m-n}},$$

tumque erit

$$\frac{dz}{\sqrt{(mzz-1)(1-nzz)}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(m-n)}\sqrt{(1+2e'\cos.\psi+e'^2)}},$$

hincque formula differentialis

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}},$$

quae primo intuitu duplicem reductionem requirere videtur, prouti $n > m$ vel $n < m$, tamen eadem ſubſtitutione ad formam propoſitam reducitur, ob litteras m et n permutabiles. Per ſingulos igitur caſus eundo, demonſtratum eſt, integralia formularum propoſitarum ſemper et omni caſu binos arcus, vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluere, niſi quatenus litteris m et n valores, ſiue euaneſcentes, ſeu infiniti tribuantur.

§. 18. Quod autem formulas differentiales attinet ex prioribus deriuandas, poſito vel $m = 0$, vel $m = \infty$, illae ſequenti ratione expediuntur. Formula differentialis $\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}}$ fit aequalis $\frac{d\psi}{\sqrt{n}\sqrt{2(1+\cos.\psi)}}$ §. 13, poſito $e = 1$ et $z = \frac{\sin.\psi}{\sqrt{n}(1+\cos.\psi)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ tang. $\frac{1}{2}\psi$.

Formu-

Formula differentialis

$\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}}$ aequalis fiet

$= \frac{d\Phi}{\sqrt{n}}$ §. 14, poſito $e=0$, et $z=\frac{cof.\Phi}{\sqrt{n}}$.

Differentiale autem

$\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}}$ fiet $= \frac{d\Phi}{\sqrt{n}.\sqrt{2}.(1+cof.\Phi)}$

$$= \frac{d\Phi}{2\sqrt{n}.\,cof.\frac{1}{2}\Phi}$$ §. 15. poſito $e=1$, et

$$z = \frac{1}{\sqrt{n}.\,cof.\frac{1}{2}\Phi},$$

et hi quidem ſunt caſus, pro quibus ſtatuitur $m=0$. Pro caſibus autem, vbi $m=\infty$, negotium per reductiones ſupra commemoratas non prorſus confici poteſt. Sic ſi formulae differentialis $\frac{dz}{z\sqrt{(1+nzz)}}$ integrale ope §. 13. quaeri deberet, ſubſtitutio $z=\frac{fin.\Phi}{\sqrt{m}(1+cof.\Phi)}$ fieret incongrua, ob $\sqrt{m}=\infty$. Si vero ponatur

$e\sqrt{(e^2-1)}\ \frac{fin.\Phi}{1+e\,cof.\Phi} = \frac{1+e\,cof.\psi}{fin.\psi}$, fiet

$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}} = \frac{-d\psi}{\sqrt{(1+2e.cof.\psi+e^2)}}$,

vnde poſito $e=1$, eſſe debebit

$$\frac{dz}{z\sqrt{(1+nzz)}} = \frac{-d\psi}{\sqrt{2(1+cof.\psi)}} = \frac{-d\psi}{2\,cof.\frac{1}{2}\psi},$$

poſito

$z = \frac{1}{e\sqrt{m}(e^2-1)}\ \frac{1+cof.\psi}{fin.\psi}$. Eſt vero ob

$e^2=\frac{m+n}{m}$, $e^2-1=\frac{n}{m}$ et $\sqrt{m(e^2-1)}=\sqrt{n}$,

vnde pro caſu praeſenti

$z = \frac{1}{\sqrt{n}}\,cof.\frac{1}{2}\psi.$

Formu-

Formula differentialis

$$\frac{dz}{z\sqrt{(1-nzz)}} \text{ fit } = \frac{-d\Phi}{\sqrt{2(1+\text{coſ.}\Phi)}} = \frac{-d\Phi}{2\,\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi}$$

§. 14, poſito $e=1$, et

$$z = \frac{1+\text{coſ.}\Phi}{\sqrt{n}\sqrt{z(1+\text{coſ.}\Phi)}} = \frac{\text{coſ.}\frac{1}{2}\Phi.}{\sqrt{n}}.$$

Denique formula differentialis

$\frac{dz}{z\sqrt{(nzz-1)}}$ per §. 15 fit $= d\Phi$, poſito $e=0$ et $z=\frac{1}{\sqrt{n}.\text{coſ.}\Phi}$.

§. 19. Praeter reductiones in ſuperioribus commemoratas pro formulis huius generis: $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$, aliae quoque adhiberi poſſent, quarum mentionem inieciſſe ſufficiet. Sic pro formula

$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)(1+nzz)}}$ ſubſtitutio $z=\lambda\frac{(1+e\,\text{coſ.}\psi)}{\text{ſin.}\psi}$

adhiberi poteſt. Pro formula

$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)(1-nzz)}}$ ſubſtitutione vti licebit $z=\frac{\lambda\,\text{ſin.}\psi}{(1+e\,\text{coſ.}\psi)^2}$;

poſito enim $n\lambda^2 = 1-e^2$, fiet

$$1-nzz\,\frac{(1+e\,\text{coſ.}\psi)^2-(1-e^2)\,\text{ſin.}\psi^2}{(1+e\,\text{coſ.}\psi)^2} = \frac{(\text{coſ.}\psi+e)^2}{(1+e\,\text{coſ.}\psi)^2},$$

tum vero erit

$$1+mzz\,\frac{1+2e\,\text{coſ.}\psi+e^2}{(1+e\,\text{coſ.}\psi)^2}, \text{ poſito } e^2=\frac{m}{m+n}.$$

Pro formula $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}}$, praeter ſubſtitutionem §. 15 allatam, iſthanc: $z=\lambda\frac{(1+e\,\text{coſ.}\psi)}{\text{ſin.}\psi}$ adhibere quoque licebit, vbi $n\lambda^2=\frac{1}{1-e^2}$. Vlterius formulae $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(1-nzz)}}$ reductio perficietur ope ſubſtitutionis

$z = \frac{\lambda \, \text{ſin.} \, \psi}{\sqrt{(1 + 2 \, \text{coſ.} \, \psi + e^2)}}$, et poſito $n \lambda^2 = 1$, fiet

$1 - n z z = \frac{(e + \text{coſ.} \, \psi)^2}{1 + 2 e \, \text{coſ.} \, \psi + e^2}$, nec non

$1 - m z z = \frac{(1 + e \, \text{coſ.} \, \psi)^2}{1 + 2 e \, \text{coſ.} \, \psi + e^2}$, poſito $\frac{m}{n} = e^2$.

At tamen formulae $\frac{dz}{\sqrt{(1 - m z z)(n z z - 1)}}$ reductio, inſtituenda ſubſtitutione

$$z = \lambda \frac{(1 + e \, \text{coſ.} \, \psi)}{\text{ſin.} \, \psi},$$

non ſuccedit, quia, etiamſi $n z z - 1$ ad alterutram harum formarum:

$$\frac{(e + \text{coſ.} \, \psi)^2}{\text{ſin.} \, \psi^2}, \text{ vel } \frac{1 + 2 e \, \text{coſ.} \, \psi + e^2}{\text{ſin.} \, \psi} \text{ reducatur},$$

nullo modo praeſtari poteſt, vt $1 - m z z$ alterutri harum formarum aequetur.

§. 20. Si in formulis ſupra §§. 6 - - - 9 allatis ponatur $z z = v$, has conſequemur formulas differentiales, per rectificationem Sectionum Conicarum integrabiles:

$$1. \; \frac{dv \sqrt{(1 + m v)}}{\sqrt{v (1 + n v)}}; \quad 2. \; \frac{dv \sqrt{(1 + m v)}}{v \sqrt{v (1 + n v)}}; \quad 3. \; \frac{dv \sqrt{v}}{\sqrt{(1 + m v)(1 + n v)}};$$

$$4. \; \frac{dv}{v \sqrt{v (1 + m v)(1 + n v)}}; \quad 5. \; \frac{dv \sqrt{(1 + m v)}}{(1 + n v) \sqrt{v (1 + n v)}};$$

$$6. \; \frac{dv \sqrt{v}}{(1 + n v)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1 + m v)}}; \quad 7. \; \frac{dv}{(1 + n v)^{\frac{3}{2}} \sqrt{v (1 + m v)}};$$

$$8. \; \frac{dv}{\sqrt{v (1 + m v)(1 + n v)}}.$$

Ex quibus concluditur, hoc differentiale:

$$\frac{du (A + B u)}{\sqrt{(\alpha + \beta u)(\gamma + \delta u)(\varepsilon + \zeta u)}},$$

ſiue ſimpliciter $\frac{du (A + B u)}{\sqrt{u (\alpha + \beta u)(\gamma + \delta u)}}$ per rectificationem Sectionum

onum Conicarum integrari poſſe; eſt enim hoc differentiale:

$$\frac{A\,du}{\sqrt{u(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)}} + \frac{B\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)}}$$

$$= \frac{A\,du}{\sqrt{\alpha\gamma}.\sqrt{(u(1+\frac{\beta}{\alpha}u)(1+\frac{\delta}{\gamma}u)}}$$

$$+ \frac{B\,du\sqrt{u}}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{(1+\frac{\beta}{\alpha}u)(1+\frac{\delta}{\gamma}u)}},$$

quae cum formulis differentialibus 8 et 3 plane congruunt. Quin imo adeo haec formula differentialis:

$$\frac{du(A+Bu)}{\sqrt{u(1+2mu\,\text{coſ.}\,\theta+m^2u^2)}},$$

per rectificationem Sectionum Conicarum ſit integrabilis, etiamſi productum $1+2mu\,\text{coſ.}\,\theta+m^2u^2$ binos factores habeat imaginarios. Nam ſi ponatur

$$1+2mu\,\text{coſ.}\,\theta+m^2u^2=(1+muz)^2,$$

fiet $2mu\,\text{coſ.}\,\theta=m^2u^2(z^2-1)+2muz$, vnde colligitur

$$u=\frac{2(\text{coſ.}\,\theta-z)}{m(zz-1)}=\frac{2(z-\text{coſ.}\,\theta)}{m(1-zz)};\quad du=\frac{2dz(1+z^2-2z\,\text{coſ.}\,\theta)}{m(1-zz)^2};$$

$$1+muz=\frac{1+2z(z-\text{coſ.}\,\theta)}{1-zz}=\frac{1+2z\,\text{coſ.}\,\theta+zz}{1-zz},$$

ideoque, ob

$$A+Bu=\frac{mA(1-zz)+2B(z-\text{coſ.}\,\theta)}{m(1-zz)},$$

prodibit

$$\frac{du(A+Bu)}{\sqrt{u(1+2mu\,\text{coſ.}\,\theta+m^2u^2)}}=\frac{du(A+Bu)}{(1+muz)\sqrt{u}}=\frac{A\,du}{(1+muz)\sqrt{u}}$$

$$+\frac{B\,du\sqrt{u}}{1+muz}=\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)(z-\text{coſ.}\,\theta)}}$$

$$+\frac{2B\sqrt{2}}{n\sqrt{m}}\frac{dz\sqrt{(z-\text{coſ.}\,\theta)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}.$$

Prioris formae integratio per formulam noſtram 8 conſtat;

 pro

pro poſteriori vero habetur

$$\int \frac{dz\,\sqrt{(z-\operatorname{coſ}.\,\theta)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\,\sqrt{(z-\operatorname{coſ}.\,\theta)}}{(1-zz)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z-\operatorname{coſ}.\,\theta)\,(1-zz)}},$$

quod vltimum integrale quomodo ad rectificationes Sectionum Conicarum ſit reducendum ex ſuperioribus conſtat.

§. 21. In Tomo VIII Nouor. Comment. docuit Illuſtris *Eulerus*, integrationem huiusmodi formulae:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}}$$

ſemper et omni caſu, per rectificationem Sectionum Conicarum expediri poſſe. Nam ſi ſupponatur formam $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ in hos factores trinomiales reales reſolui:

$$\alpha+2\beta x+\gamma x^2 \text{ et } \delta+2\varepsilon x+\zeta xx,$$

tumque ponatur

$$y = \frac{\surd+2\varepsilon x+\zeta xx}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}, \text{ fiet}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}} = \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y(pyy+qy+r)}},$$

vbi

$$p=\beta\beta-\alpha\gamma;\; q=\alpha\zeta-2\beta\varepsilon+\gamma\delta;\; r=\varepsilon\varepsilon-\zeta\zeta.$$

At vero de formula

$$\frac{dx\,(A+Bx+Cxx)}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}}$$

nondum conſtitit, qua ratione eius integratio per rectificationem Sectionum Conicarum generatim expediatur. Facile autem liquet, formulam ſimpliciorem:

$$\frac{dx\,(A+Bx+Cx^2)}{\sqrt{(Dx^4+Ex^2+F)}},$$

ita

ita eſſe comparatam, vt ſemper per rectificationem Sectionum Conicarum integretur; nam poſito $xx = z$, fit

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{z}}, \text{ et } \frac{dx(A + Cx^2)}{\sqrt{(Dx^4 + Ex^2 + F)}} = \frac{dz(A + Cz)}{\sqrt{z(Dzz + Ez + F)}}$$
$$= \frac{A\,dz}{\sqrt{z(Dzz + Ez + F)}} + \frac{C\,dz\sqrt{z}}{\sqrt{(Dzz + Ez + F)}},$$

quae differentialia cum forma

$$\frac{du(A + Bu)}{\sqrt{u(1 + 2mu\,coſ.\theta + m^2 u^2)}}$$

(§. 20) congruunt, ſi nimirum $Dzz + Ez + F$ factores non habuerit reales, alioquin autem ad formas noſtras 8 et 3, eodem § allatas, reducuntur. Tum vero erit

$$\frac{Bx\,dx}{\sqrt{(Dx^4 + Ex^2 + F)}} = \frac{B\,dz}{z\sqrt{(Dz^2 + Ez + F)}},$$

cuius differentialis integratio quadraturam Circuli vel Hyperbolae inuoluit.

22. Quod attinet formulam

$$\frac{dy(P + Qy + Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E)}},$$

quamuis non conſtet, an generatim ad rectificationem Sectionum Conicarum reducatur, tamen ab Illuſtr. *Eulero*, in Tomo VIII Commentar. demonſtratum eſt, eandem per hanc rectificationem eſſe integrabilem, quoties fuerit $QA = RB$, ex quo, ſi fuerit $B = 0$, ſequitur etiam ſtatuendum eſſe $Q = 0$, vnde colligitur, pro iſto caſu formulam propoſitam ſequentem adipiſci formam:

$$\frac{dy(P + Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4 + Cy^2 + 2Dy + E)}},$$

hinque formula iſta generalis ad rectificationem Sectionum Conicarum reducetur, modo formula

$$\frac{Ry^2\,dy}{\sqrt{(Ay^4 + Cy^2 + 2Dy + E)}},$$

ad iſtam rectificationem ſe reduci patiatur. Pro caſu autem particulari, quo $QA = RB$, demonſtratio etiam ſe-

quenti ratione adornari poterit:

Ponatur $y = \frac{m + nx}{m' + n'x}$, eritque

$$\sqrt{(Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E)} =$$
$$\frac{\sqrt{(A(m+nx)^4 + 2B(m+nx)^3(m'+n'x) + C(m+nx)^2(m'+n'x)^2 + 2D(m+nx)(m'+n'x)^3 + E(m'+n'x)^4)}}{(m'+n'x)^2}$$

et $dy = \frac{(m'n - mn')\,dx}{(m'+n'x)^2}$; hinc ſi in formula transformata, coefficientes poteſtatum x^3 et x euaneſcere ſupponantur, has aequationes adipiſcemur:

1°.) $4Amn^3 + 2Bm'n^3 + 6Bmn'n^2 + 2Cm'n'n^2$
$+ 2Cmnn'^2 + 2Dmn'^3 + 6Dnm'n'^2$
$+ 4Em'n'^3 = 0$;

2°.) $4Am^3n + 2Bm^3n' + 6Bm^2m'n + 2Cmm'^2n$
$+ 2Cm^2m'n' + 2Dm'^3n + 6Dm'^2n'm$
$+ 4Em'^3n' = 0$;

ex priori colligimus:

$$2A + B\frac{m'}{m} + 3B\frac{n'}{n} + C\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n} + C\frac{n'^2}{n^2} + D\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+ 3D\frac{m'}{m}.\frac{n'^2}{n^2} + 2E\frac{m'}{m}.\frac{n'^3}{n^3} = 0;$$

ex altera vero

$$2A + B\frac{n'}{n} + 3B\frac{m'}{m} + C\frac{m'^2}{m^2} + C\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n} + D\frac{m'^3}{m^3}$$
$$+ 3D\frac{n'}{n}.\frac{m'^2}{m^2} + 2E\frac{n'}{n}.\frac{m'^3}{m^3} = 0,$$

quarum aequationum differentia, per $\frac{m'}{m} - \frac{n'}{n}$ diuiſa, praebet:

$$0 = 2B + C\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right) + D\left(\frac{m'^2}{m^2} + \frac{4m'n'}{mn} + \frac{n'^2}{n^2}\right)$$
$$+ 2E\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n}\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right).$$

Simili autem ratione colligitur, multiplicando priorem per $\frac{m'}{m}$ et poſteriorem per $\frac{n'}{n}$, tumque diuidendo productorum differentiam per $\frac{m'}{m} - \frac{n'}{n}$:

$$0 = 2A + B\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right) - D\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n}\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right) - 2E\frac{m'^2}{m^2}.\frac{n'^2}{n^2}.$$

Si

Si breuitatis gratia ponatur

$$\frac{n'}{m}+\frac{n'}{n}=p,\ \frac{m'}{m}.\frac{n'}{n}=q;$$

noſtrae aequationes ita erunt expreſſae:

$$0=2B+Cp+D(pp+2q)+2Epq$$
$$0=2A+Bp-Dpq-2Eq^2.$$

Ex poſteriori fit $p=\frac{2(Eq^2-A)}{B-Dq}$, qui valor in priori ſubſtitutus praebet hanc aequationem:

$$2B(B-Dq)^2+2C(B-Dq)(Eq^2-A)$$
$$+4D(Eq^2-A)^2+2D(B-Dq)^2q$$
$$+4E(Eq^2-A)(B-Dq)q,$$

quae euoluta erit:

$$q^3(D^3-CDE+2BEE)-q^2(BD^2-BCE+2ADE)$$
$$-q(B^2D-ACD+2ABE)$$
$$+B^3-ABC+2A^2D=0.$$

§. 23. Simul ac ex hac aequatione valor ipſius q definitus fuerit, habebitur p ope aequationis $p=\frac{2(Eq^2-A)}{B-Dq}$, tumque facili negotio inuenientur:

$$\frac{m'}{m} \text{ et } \frac{n'}{n}, \text{ ob } \frac{m'}{m}+\frac{n'}{n}=p \text{ et } \frac{m'}{m}.\frac{n'}{n}=q.$$

Caeterum heic quoque obſeruaſſe iuuat, eſſe, in formula transformata, coefficientes ipſorum x^4, x^2 et terminum abſolutum hac ratione expreſſos:

$$A'=An^4+2Bn^3n'+Cn^2n'^2+2Dn'^3n+En'^4$$
$$C'=6Am^2n^2+6B(mm'n^2+m^2nn')$$
$$+C(m^2n'^2+m'^2n^2+4mm'nn')$$
$$+6D(mm'n'^2+m'^2nn')+6Em'^2n'^2$$
$$E'=Am^4+2Bm^3m'+Cm^2m'^2+2Dm'^3m+Em'^4.$$

De-

Definitis valoribus ipſorum m, m', n, n', ſtatuatur:

$$\int \frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}} = \frac{\alpha\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}}{n'y-n}$$
$$+\int \frac{dx(P'+Q'x+R'x^2)}{\sqrt{(A'x^4+C'x^2+E')}};$$

huiusmodi enim formam hoc integrale eſſe habiturum leui attentione patet; ſumtis igitur differentialibus, ob

$x = \frac{m-m'y}{n'y-n}$ et $\frac{dy}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}} = \frac{(nm'-n'm).\,dx}{\sqrt{(A'x^4+C'x^2+E')}}$,

has conſequemur aequalitates:

$$n'^2R = n'\alpha A, \text{ ſiue } \alpha A = n'R;$$
$$n'^2Q - 2nn'R = -2n\alpha A + n'\alpha B, \text{ vnde}$$
$$\alpha B = n'Q, \text{ hincque } \tfrac{R}{A} = \tfrac{Q}{B}.$$

Porro fit

$$n'^2P - 2n'nQ + n^2R = -3n\alpha B$$
$$+ \frac{1}{m'n-mn'}(P'n'^2 - Q'n'm' + R'm'^2);$$
$$-2nn'P + n^2Q = -n\alpha C - n'\alpha D$$
$$+ \frac{1}{m'n-mn'}(-2P'nn' + Q'(n'm+nm') - 2R'mm');$$
$$n^2P = -n\alpha D - n'\alpha E + \frac{1}{m'n-mn'}(P'n^2 - Q'mn + R'm^2),$$

quae etiam concinnius ita exprimuntur:

$$n'^2P = -\frac{n^2\alpha A}{n'} - n\alpha B + \frac{1}{m'n-mn'}(P'n'^2 - Q'm'n' + R'm'^2);$$
$$-2nn'P = -\frac{n^2\alpha B}{n'} - n\alpha C - n'\alpha D$$
$$+ \frac{1}{m'n-mn'}(-2P'nn' + Q'(n'm+m'n) - 2R'mm');$$
$$+n^2P = -n\alpha D - n'\alpha E + \frac{1}{m'n-mn'}(P'n^2 - Q'mn + R'm^2).$$

Si prima, per $2n$ multiplicata, addatur ad ſecundam, in n' ductam, tumque ſumma capiatur ſecundae in n ductae et tertiae per $2n'$ multiplicatae, has obtinemus aequationes:

$$0 = -\frac{2n^3\alpha A}{n'} - 3n^2\alpha B - nn'\alpha C - n'^2\alpha D - n'Q' + 2R'm',$$
$$0 = -\frac{n^3\alpha B}{n'} - n^2\alpha C - 3nn'\alpha D - 2n'^2\alpha E - nQ' - 2R'm.$$

Sum-

Sumta autem ſumma prioris per m et poſterioris per m' multiplicatae, fiet

$$-2mn^3\alpha A - 3mn'n^2\alpha B - mn^3\alpha B - m'n'n^2\alpha C$$
$$-mnn'^2\alpha C - mn'^3\alpha D - 3m'nn'^2\alpha D$$
$$-2m'n'^3\alpha E - n'Q'(mn' + m'n) = 0$$

vbi quum per §. praecedentem liqueat, terminum per α multiplicatum eſſe $=0$, fiet quoque $Q'=0$; vnde R' per alterutram aequationum modo allatarum definietur. Hincque ſi aequationum, quas tam P' quam R' ingrediuntur, prima in $2m$ ſecunda in m' ducatur, fiet

$$2P' = -\frac{2mn^3\alpha A}{n'^2} - \frac{m'n^2\alpha B}{n'^2} - \frac{2mn\alpha B}{n'} - \frac{m'n\alpha C}{n'}$$
$$-m'\alpha D + 2P(m'n - mn').$$

§. 24. Hac igitur ratione euictum eſt, formulam

$$\frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}},$$

ſemper ad iſtam ſimpliciorem:

$$\frac{dx(P'+R'x^2)}{\sqrt{(A'x^4+C'x^2+E')}}$$

eſſe reducibilem, quoties fuerit $AQ=RB$. Hinc ſi factores expreſſionis

$$Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E \text{ ſint,}$$

$\alpha y^2+2\beta y+\gamma$, $\delta y^2+2\varepsilon y+\zeta$, forma

$$\frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}},$$

etiam ſic exprimi poteſt:

$$\frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(\alpha y^2+2\beta y+\gamma)(\delta y^2+2\varepsilon y+\zeta)}};$$

vbi ſi ponatur $R=\mu\alpha$, fiet

$$\frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(\alpha y^2+2\beta y+\gamma)(\delta y^2+2\varepsilon y+\zeta)}} = \frac{dy(\mu\alpha y^2+\mu\beta y+P)+(Q-\mu\beta)y\,dy}{\sqrt{(\alpha y^2+2\beta y+\gamma)(\delta y^2+2\varepsilon y+\zeta)}},$$

vbi quum prius membrum reductionis ſupra commemoratae ſit ſuſceptibile, iam ſequeretur, formulam generalem ad rectificationem Sectionum Conicarum reduci poſſe, modo formula

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)(\delta y^2 + 2\varepsilon y + \zeta)}}$$

per iſtam rectificationem integretur. Et ſi loco y ponatur eius valor $\frac{m+nx}{m'+n'x}$, facile patet, formulam modo dictam in huiusmodi abire:

$$\frac{(\lambda + \mu x)\,dx}{(\lambda' + \mu' x)\sqrt{(A' x^4 + C' x^2 + E')}},$$

cuius formulae integratio per rectificationem Sectionum Conicarum perficietur, modo iſthaec formula:

$$\frac{dx}{(\lambda' + \mu' x)\sqrt{(A' x^4 + C' x^2 + E')}}$$

per iſtam rectificationem fuerit integrabilis. Hic ſi ſtatuatur $x = \frac{1}{v}$, formula modo allata in iſtam abibit:

$$\frac{v\,dv}{(\mu' + \lambda' v)\sqrt{(A' + C' v^2 + E' v^4)}},$$

vnde iterum, ponendo $v^2 = z$, huiusmodi emerget formula:

$$\frac{dz}{(\mu' + \lambda' \sqrt{z})\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}}.$$

Binarum vero huiusmodi formularum:

$$\frac{dz}{(\mu' - \lambda' \sqrt{z})\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}} \text{ et } \frac{dz}{(\mu' + \lambda' \sqrt{z})\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}}$$

$$\text{ſumma} = \frac{2\mu'\,dz}{(\mu'^2 - \lambda'^2 z)\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}},$$

manifeſto ad rectificationem Sectionum Conicarum eſt reducibilis. Differentiae vero

$$= \frac{2\lambda'\,dz\sqrt{z}}{(\mu'^2 - \lambda'^2 z)\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}}$$

reductio ad iſtam rectificationem dependet exinde, vtrum haec formula:

$$\frac{dz}{(\mu'^2 - \lambda'^2 z)\sqrt{z(A' + C' z + E' zz)}}$$

ad hanc rectificationem reduci poſſit, nec ne.

§. 25.

§. 25. Si hanc diſquiſitionem vlterius proſequi velimus, diſpiciendum eſt, vtrum expreſſio $A' + C'z + E'zz$ factores habuerit reales nec ne? Priori caſu ſupponamus illos eſſe $(\alpha + \beta z)(\gamma + \delta z)$, ita vt huiusmodi propoſita ſit formula:

$$\frac{dz}{(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z(\alpha+\beta z)(\gamma+\delta z)}} = \frac{dz(\varepsilon - \zeta z)}{\varepsilon(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z(\alpha+\beta z)(\gamma+\delta z)}}$$
$$+ \frac{\zeta z dz}{\varepsilon(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z(\alpha+\beta z)(\gamma+\delta z)}}.$$

Prius membrum per rectificationem ſaepius commemoratam eſt integrabile, poſterius vero, ponendo $\varepsilon - \zeta z = v$, huiusmodi obtinebit formam:

$$\frac{dv\sqrt{(\varepsilon - v)}}{v\sqrt{(\lambda+\mu v)(\lambda'+\mu' v)}},$$

vnde iterum ponendo $\lambda + \mu v = uu$, tandem huiusmodi proueniet formula:

$$\frac{du}{(c+eu^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a+bu^2)}}{\sqrt{(f+gu^2)}},$$

ſiue ſimpliciter

$$\frac{du}{(1+u^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a+bu^2)}}{\sqrt{(f+gu^2)}}, \quad \frac{du}{(1-u^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a+bu^2)}}{\sqrt{(f+gu\ )}},$$

has enim binas poſteriores cum illa generaliori aeque late patere, nullum eſt dubium.

§. 26. Denique ſi expreſſio $A' + C'z + E'zz$ factores non habuerit reales, ſeu ſi huius ſit formae: $\alpha^2 + 2n\alpha\beta z + \beta^2 zz$, exiſtente $n < 1$, ponatur

$$\sqrt{(\alpha^2 + 2n\alpha\beta z + \beta^2 zz)} = \beta z + x,$$

vnde fiet

$$\alpha^2 + 2n\alpha\beta z = 2\beta xz + x^2, \text{ hincque}$$
$$z = \frac{\alpha^2 - x^2}{2\beta(x - n\alpha)}; \quad dz = -\frac{dx(x^2 - 2n\alpha x + \alpha^2)}{2\beta(x-n\alpha)^2};$$
$$\beta z + x = \frac{x^2 - 2n\alpha x + \alpha^2}{2(x - n\alpha)};$$

 ε —

$$\varepsilon - \zeta z = \frac{2\beta\varepsilon(x - n\alpha) - \zeta(\alpha^2 - x^2)}{2\beta(x - n\alpha)};$$

quam ob rem obtinebimus

$$\frac{dz}{(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z}(A' + C'z + E'zz)} = \frac{dz}{(\varepsilon - \zeta z)(\beta z + x)\sqrt{z}}$$

$$= - \frac{2dx\sqrt{2\beta(x - n\alpha)}}{(\zeta x^2 + 2\beta\varepsilon x - 2n\alpha\beta\varepsilon - \alpha^2\zeta)\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}},$$

vbi ob

$$\zeta x^2 + 2\beta\varepsilon x - 2n\alpha\beta\varepsilon - \alpha^2\zeta$$

in hos binos factores reſolubilem:

$$\zeta\left(x + \frac{\beta\varepsilon}{\zeta} - \sqrt{\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2}{\zeta^2} + \frac{2n\alpha\beta\varepsilon}{\zeta} + \alpha^2\right)}\right) \text{ et}$$

$$x + \frac{\beta\varepsilon}{\zeta} + \sqrt{\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2}{\zeta^2} + \frac{2n\alpha\beta\varepsilon}{\zeta} + \alpha^2\right)},$$

formula vltimo allata in binas huius generis reſolui poterit:

$$\frac{\mu dx\sqrt{(x - n\alpha)}}{(x + \lambda)\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}} \text{ et } \frac{\mu' dx\sqrt{(x - n\alpha)}}{(x - \lambda')\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}},$$

quas in § praecedenti ad altervtram harum formarum:

$$\frac{du}{1 + u^2} \cdot \frac{\sqrt{(a + bu^2)}}{\sqrt{(f + gu^2)}} \text{ vel } \frac{du}{1 - u^2} \cdot \frac{\sqrt{(a + bu^2)}}{\sqrt{(f + gu^2)}},$$

reduci poſſe docuimus.

DE

DE CASIBVS QVIBVSDAM MAXIME MEMORABILIBVS IN ANALYSI INDETERMINATA; VBI IMPRIMIS INSIGNIS VSVS CALCVLI ANGVLORVM IN ANALYSI DIOPHANTAEA OSTENDITVR.

Auctore
L. EULERO.

§. 1.

Quaeſtionum, quas hic ſum tractaturus, iam olim mentionem feci, in Diſſertatione, Tomo VI. Nouor. Comm. inſerta ſub titulo: *De Problematibus indeterminatis, quae videntur plusquam determinata*; vbi oſtendi, quomodo vnica aequatione, inter quantitates indeterminatas conſtituta, plurima Problemata Diophantaea facili calculo ſimul reſolui queant; id quod vtique maxime Paradoxon videbatur, cum vulgo numerus conditionum propoſitarum numerum quantitatum incognitarum ſuperare non ſoleat. Quam ob cauſſam argumentum ibi tractatum vtique in Analyſi maximi momenti eſt cenſendum. Tum temporis autem in eiusmodi aequationibus ſubſiſtere fui coactus, in quibus quantitates indeterminatae non vltra ſecundam dimenſionem aſcendant. Nunc autem tales aequationes ſum contemplaturus, vbi indeterminatae adeo ad quartam dimen-

ſionem aſſurgunt, quarum reſolutio fines Analyſeos tranſcendere videatur, quandoquidem hic tantum de ſolutionibus per numeros rationales agitur.

§. 2. Prima igitur aequatio quarti gradus, quam hic tractabo, hoc Problemate continetur.

Problema I.

Inuenire quatuor numeros rationales x, y, z, v, *vt huic aequationi ſatisfiat:*

$$\left.\begin{matrix} x^4+y^4+z^4-2xxyy-2xxzz-2yyzz \\ +2xxvv+2yyvv+2zzvv+v^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

cuius formulae, ſatis prolixae, loco hic breuitatis gratia in ſequentibus ſcribam litteram V.

§. 3. Pro his autem litteris x, y, z, v, inuentis idoneis valoribus, ſimul ſequentes ſeptem formulae ſponte euadent numeri quadrati, quae ſunt:

I. $xxyy-zzvv=\frac{1}{4}(xx+yy-zz+vv)^2$
II. $xxzz-yyvv=\frac{1}{4}(xx+zz-yy+vv)^2$
III. $yyzz-xxvv=\frac{1}{4}(yy+zz-xx+vv)^2$
IV. $xxyy-vv(xx+yy)=\frac{1}{4}(xx+yy-zz-vv)^2$
V. $xxzz-vv(xx+zz)=\frac{1}{4}(xx+zz-yy-vv)^2$
VI. $yyzz-vv(yy+zz)=\frac{1}{4}(yy+zz-xx-vv)^2$
VII. $xxyy+xxzz+yyzz=\frac{1}{4}(xx+yy+zz+vv)^2$.

Ratio per ſe eſt manifeſta, cum quarta pars formulae noſtrae V, cuius valor per hypotheſin $=0$, ſingulis his ſeptem formulis addita, producat reuera quadrata, quorum radices hic aſſignauimus.

§. 4.

§. 4. Quodſi autem duae tantum huiusmodi formulae, vel adeo tres proponantur, quae quadrata reddi debeant, per praecepta communia methodi Diophanteae negotium difficillime confici poterit, etiamſi quis maxime prolixos calculos expediuerit; vnde intelligitur, ſi quatuor pluresue tales formulae ad quadrata reducendae proponantur, ſolutionem ne tentari quidem poſſe. Tanto magis igitur erit mirandum, quando omnium harum ſeptem formarum reductionem ad quadrata vnico quaſi labore aſſignabimus.

Solutio Problematis propoſiti.

§. 5. Totam autem ſolutionem ex duabus tantum prioribus formulis deduci poſſe obſeruaui, quemadmodum ex ſequente Analyſi intelligetur. Facile autem apparet, primam formulam $xxyy - zzvv$ quadratum reddi, ſi ſumatur $xy = zv\frac{(pp + rr)}{2pr}$; tum enim huius formulae radix erit $= \frac{zv(pp - rr)}{2pr}$, quae igitur aequalis erit quantitati $\frac{1}{2}(xx + yy - zz + vv)$. Simili modo ſecunda formula euadit quadratum, ſi ſumatur

$$xz = \frac{yv(qq + ss)}{2qs};$$

tum enim eius radix erit

$$\frac{yv(qq - ss)}{2qs} = \frac{1}{2}(xx + zz - yy + vv),$$

ex quibus conditionibus iam liquet, omnes quatuor quantitates x, y, z, v, determinari poſſe, ita vt non opus ſit ad reliquas formulas reſpicere.

§. 6. Cum igitur ſit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp + rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq + ss}{2qs},$$

prior

prior per poſteriorem multiplicata dabit hanc aequationem:

$$\frac{xx}{vv} = \frac{(pp+rr)(qq+ss)}{4prps}.$$

Prior autem per poſteriorem diuiſa dat

$$\frac{yy}{zz} = \frac{qs(pp+rr)}{pr(qq+ss)};$$

vnde patet, iſtam ſolutionem abſolui non poſſe, niſi pro literis p, r, q, s, tales numeri exhiberi queant, vt iſta formula: $\frac{(pp+rr)(qq+ss)}{4prqs}$ euadat quadratum. Hoc autem praeſtito quoque altera expreſſio, pro $\frac{yy}{zz}$ inuenta, fiet quadratum. Infra autem fuſius oſtendemus, quomodo tales numeri p, r, q, s, quotcunque libuerit, inueſtigari queant.

§. 7. Hic igitur aſſumemus tales numeros nobis iam eſſe cognitos, indeque reperiri

$$\frac{xx}{vv} = \frac{aa}{bb} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{cc}{dd};$$

inde ergo ſtatuatur

$$x = at;\ v = bt;\ y = cu \text{ et } z = du,$$

et iam has duas literas t et u ex radicibus ante exhibitis ſequenti modo facile eruere licebit. His enim valoribus ſubſtitutis prior radix praebebit

$$\frac{bdtu(pp-rr)}{pr} = (aa+bb)tt + (cc-dd)uu.$$

Simili modo ex altera radice nanciſcimur

$$\frac{bctu(qq-ss)}{qs} = (aa+bb)tt - (cc-dd)uu.$$

Sufficeret autem vnica harum duarum aequationum, quandoquidem per extractionem radicis quadratae ambae quantitates t et u, atque adeo duplici modo definiri poſſent, niſi forte ad irrationalia delaberemur. Hoc autem fieri non poſſe ex ſequenti Analyſi pateſcet.

Formu-

§. 8. Statuamus hic breu. gr.

$$\frac{pp-rr}{2pr}=m \text{ et } \frac{qq-ss}{2qs}=n,$$

vbi notetur, pro radicibus quadratis etiam ſumi potuiſſe

$$\frac{rr-pp}{2pr} \text{ et } \frac{ss-qq}{2qs};$$

vnde patet, ambas literas m et n tam poſitiue quam negatiue accipi poſſe. Hoc modo habebimus has aequationes:

$$2mbdtu=(aa+bb)tt+(cc-dd)uu$$
$$2nbctu=(aa+bb)tt-(cc-dd)uu,$$

quae duae aequationes, additae, dabunt hanc:

$$b(md+nc)tu=(aa+bb)tt,$$

quae praebet

$$\frac{t}{u}=\frac{b(md+nc)}{aa+bb}.$$

Eodem modo, ſi poſterior a priore ſubtrahatur, prodibit iſta aequalitas:

$$b(md-nc)tu=(cc-dd)uu,$$

vnde iterum deducitur

$$\frac{t}{u}=\frac{cc-dd}{b(md-nc)},$$

qui duo valores certe inter ſe conuenire debent. Vtamur igitur poſteriore forma, et quia literas m et n pro lubitu ſiue poſitiue ſiue negatiue accipere licet, ſtatuamus

$$t=cc-dd \text{ et } u=b(md\pm nc);$$

vbi iam duplex ſolutio inuoluitur.

§. 9. Subſtituamus igitur hos valores, atque omnes noſtrae quatuor quantitates incognitae x, y, z, v, ſequenti modo prodibunt determinatae:

$$x = a(cc - dd);\ v = b(cc - dd)$$
$$y = bc(md \pm nc);\ z = bd(md \pm nc),$$

vbi vel ſigna ſuperiora vel inferiora vbique capi debebunt. Atque nunc certo aſſeuerare poſſumus, his valoribus literarum x, y, z, v, omnes ſeptem formulas ſupra memoratas quadrata reddi, quamuis tantum duas priores hic in computum duxerimus.

§. 10. Ante autem quam methodum ſumus tradituri, numeros idoneos pro literis p, r, q, s inueſtigandi, conueniet hanc ſolutionem per aliquot exempla illuſtrare, in quo negotio quidem neceſſe erit, ex iis, quae deinceps tradentur, valores idoneos pro literis p, r, q, s, depromere.

Exemplum I.

vbi $p = 5$, $r = 1$, $q = 8$, $s = 1$.

§. 11. Ex his igitur valoribus habebimus ſtatim

$$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{5} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{65}{16};$$

hinc iam ſequitur, fore

$$\frac{xx}{vv} = \frac{13^2}{4^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{4^2}{5^2};$$

quamobrem ſtatuamus

$$x = 13t;\ v = 4t;\ y = 4u;\ z = 5u,$$

ita vt ſit

$$a = 13;\ b = 4;\ c = 4;\ d = 5.$$

Iam porro quia eſt

$$m = \frac{12}{5} \text{ et } n = \frac{63}{16},$$

ex

ex his iam valoribus namiſcemur

$$x = 39;\ v = 12;\ y = 16\,(4 \pm \tfrac{21}{4});\ z = 20\,(4 \pm \tfrac{21}{4}).$$

Prouti igitur vel ſuperiora ſigna vel inferiora valent, obtinebimus duas ſequentes ſolutiones ad minimos terminos reductas, ſi forte habuerint inter ſe comunem factorem:

I. $x = 39;\ v = 12;\ y = 20;\ z = 25.$

II. $x = 39;\ v = 12;\ y = 148;\ z = 185.$

quarum ſolutionum prior ſine dubio ſimplices ſatis numeros Problemati ſatisfacientes ſuppeditat.

§. 12. Videamus, quomodo prior Solutio omnibus ſeptem formulis ſupra allatis ſatisfaciat

I. $\sqrt{(xxyy - zzvv)} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz + vv) = 720.$

II. $\sqrt{(xxzz - yyvv)} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy + vv) = 945.$

III. $\sqrt{(yyzz - xxvv)} = \tfrac{1}{2}(yy + zz - xx + vv) = 176.$

IV. $\sqrt{(xxyy - vv(xx + yy))} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz - vv) = 576.$

V. $\sqrt{(xxzz - vv(xx + zz))} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy - vv) = 801.$

VI. $\sqrt{(yyzz - vv(yy + zz))} = \tfrac{1}{2}(yy + zz - xx - vv) = 320.$

VII. $\sqrt{(xxyy + xxzz + yyzz)} = \tfrac{1}{2}(xx + yy + zz + vv) = 1345.$

Exemplum II.

quo $p = 5,\ r = 1,\ q = 13,\ s = 9.$

§. 13. Hic igitur erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{5}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{125}{117}$, hinc $\frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{3^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{25^2}$, ideoque $\frac{x}{v} = \frac{5}{3}$ et $\frac{y}{z} = \frac{39}{25}$.

Fiat

Fiat ergo

$$x = 5t;\ v = 3t;\ y = 39u;\ z = 25u,$$

ita vt ſit

$$a = 5;\ b = 3;\ c = 39;\ d = 25.$$

Porro autem erit

$m = \frac{12}{5}$ et $n = \frac{44}{117}$, ex quibus valoribus fiet

$$x = 5.\ 896;\ v = 3.\ 896;$$

$$y = 3.39.60 \pm 39.44;\ z = 3.25.60 \pm 25.44.$$

Hinc ergo ſequentes duae ſolutiones deducuntur:

I. $x = 112;\ v = 672;\ y = 39;\ z = 25.$

II. $x = 112;\ v = 672;\ y = 39.\ 89;\ z = 25.\ 89.$

Exemplum III.

quo $p = 8,\ r = 1;\ q = 13;\ s = 9.$

§. 14. Hoc caſu erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{65}{16}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{125}{117}$, hincque

$$\frac{xx}{vv} = \frac{25^2}{12^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{20^2}.$$

Sumto igitur

$x = 25t;\ v = 12t;\ y = 39u;\ z = 20u$ erit

$$a = 25;\ b = 12;\ c = 39;\ d = 20.$$

Porro fit

$$m = \tfrac{63}{16} \text{ et } n = \tfrac{44}{117}.$$

Hinc iam colligitur

$$x = 25.\ 1121;\ v = 12.\ 1121$$

$$y = 39\,(945 \pm 176);\ z = 20\,(945 \pm 176);$$

has

has ergo nanciſcimur ſolutiones:

I. $x = 25 \cdot 1121$; $v = 12 \cdot 1121$; $y = 39 \cdot 769$; $z = 20 \cdot 769$

II. $x = 25$; $v = 12$; $y = 39$; $z = 20$

Exemplum IV.

quo $p = 3$, $r = 1$; $q = 15$; $s = 8$.

§. 15. Fiet igitur

$\frac{xy}{zv} = \frac{5}{3}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{289}{240}$, ideoque

$\frac{xx}{vv} = \frac{17^2}{12^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{20^2}{17^2}$. Hinc ſumto

$x = 17t$; $v = 12t$; $y = 20u$; $z = 17u$ erit

$a = 17$; $b = 12$; $c = 2$; $d = 17$.

Deinde fiet

$m = \frac{4}{3}$ et $n = \frac{161}{240}$, vnde colligitur

$x = 17 \cdot 111$; $v = 12 \cdot 111$

$y = 20(272 \pm 161)$; $z = 17(272 \pm 161)$.

Hinc ſequentes ſolutiones:

I. $x = 17 \cdot 111$; $v = 12 \cdot 111$; $y = 20 \cdot 433$; $z = 17 \cdot 433$

II. $x = 17$; $v = 12$; $y = 20$; $z = 17$

quae ſolutio poſterior ſine dubio omnium eſt ſimpliciſſima.

Exemplum V.

quo $p = 5$, $r = 2$, $q = 9$, $s = 8$

§. 16. Hic erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{29}{20}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{145}{144}$, hinc

$\frac{xx}{vv} = \frac{29^2}{24^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{6^2}{6^2}$.

 Suma-

Sumatur ergo

$a = 29$; $b = 24$; $c = 6$; $d = 5$; et cum ſit

$m = \frac{21}{20}$ et $n = \frac{17}{144}$, valores quaeſiti erunt

$x = 29.\,11$; $y = 6\,(126 \pm 17)$

$v = 24.\,11$; $z = 5\,(126 \pm 17)$.

Ambae ergo ſolutiones erunt

I. $x = 29.\,11$; $v = 24.\,11$; $y = 6.\;109$; $z = 5\;109$

II. $x = 29$; $v = 24$; $y = 78$; $z = 65$

Alia Solutio eiusdem Problematis,

per Calculum angulorum deducta.

§. 17. Cum formula $xxyy - zzvv$ debeat eſſe quadratum, hoc eueniet, ſi ſumatur $xy\,\text{ſin.}\,\alpha = vz$; tum enim erit $\sqrt{(xxyy - zzvv)} = xy\,\text{coſ.}\,\alpha$, quae ergo quantitas aequalis eſt huic formulae:

$\frac{1}{2}(xx + yy - zz + vv)$.

Simili modo, poſito

$yv = xz\,\text{ſin.}\,\beta$, fiet $\sqrt{(xxzz - yyvv)} = xz\,\text{coſ.}\,\beta$

$= \frac{1}{2}(xx + zz - yy + vv)$.

§. 18. Cum igitur ſit

$\frac{xy}{zv} = \frac{1}{\text{ſin.}\,\alpha}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{1}{\text{ſin.}\,\beta}$, productum dabit

$\frac{xx}{vv} = \frac{1}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta}$;

quamobrem ſtatuamus $x = t$ et $v = t\sqrt{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta}$. Prior vero per poſteriorem diuiſa dat $\frac{yy}{zz} = \frac{\text{ſin.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\alpha}$; vnde ſtatuamus

$y = u\sqrt{\text{ſin.}\,\beta}$ et $z = u\sqrt{\text{ſin.}\,\alpha}$.

Subſti-

Subſtituantur nunc hi valores in ſuperiore radice extracta ſiue in hac aequatione:

$$2\,x\,y\,\text{coſ.}\,\alpha = x\,x + y\,y - z\,z + v\,v,$$

orieturque iſta:

$$2\,t\,u\,\text{coſ.}\,\alpha \sqrt{\text{ſin.}\,\beta} = t\,t\,(1 + \text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta) + u\,u\,(\text{ſin.}\,\beta - \text{ſin.}\,\alpha),$$

ex qua aequatione quadratica quaeratur u, fietque

$$u = \frac{t\,\text{coſ.}\,\alpha \sqrt{\text{ſin.}\,\beta} \pm t\,\text{coſ.}\,\beta \sqrt{\text{ſin.}\,\alpha}}{\text{ſin.}\,\beta - \text{ſin.}\,\alpha},$$

quamobrem ſumi poterit

$$t = \text{ſin.}\,\beta - \text{ſin.}\,\alpha \quad \text{et} \quad u = \text{coſ.}\,\alpha \sqrt{\text{ſin.}\,\beta} \pm \text{coſ.}\,\beta \sqrt{\text{ſin.}\,\alpha}.$$

§. 19. Subſtitutis igitur his valoribus loco t et u, quatuor quantitates quaeſitae x, y, z, v ita determinabuntur, vt ſit

$$x = \text{ſin.}\,\beta - \text{ſin.}\,\alpha; \quad v = (\text{ſin.}\,\beta - \text{ſin.}\,\alpha) \sqrt{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta}$$

$$y = \text{coſ}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta \pm \text{coſ.}\,\beta \sqrt{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta}; \quad z = \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\alpha + \text{coſ.}\,\alpha \sqrt{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta}.$$

Cum igitur hoc modo aequationi

$$2\sqrt{(x\,x\,y\,y - z\,z\,v\,v)} = x\,x + y\,y - z\,z + v\,v,$$

ſatisfiat, ſumtis vtrinque quadratis ipſa aequatio biquadradica propoſita V oritur, cui ergo etiam his valoribus ſatisfiet, conſequenter etiam omnes ſeptem formulae ſupra allatae ſimul fient quadrata, etiamſi in hac Analyſi binas tantum priores ſimus contemplati.

§. 20. Vt igitur valores pro x, y, z, v inuenti fiant rationales, ante omnia ſinus et coſinus angulorum α et β debent eſſe rationales, id quod fiet, ſi ſumamus

$$\text{ſin.}\,\alpha = \frac{2\,p\,r}{p\,p + r\,r} \quad \text{et} \quad \text{ſin.}\,\beta = \frac{2\,q\,s}{q\,q + s\,s};$$

tum

tum enim erit

$$\text{coſ.}\,\alpha = \frac{pp - rr}{pp + rr} \text{ et coſ.}\,\beta = \frac{qq - ss}{qq + ss}.$$

Praeterea vero hic imprimis requiritur, vt productum ſinuum, ſcilicet:

$$\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta = \frac{4pqrs}{(pp + rr)(qq + ss)} = \square,$$

quae eſt ea ipſa conditio, quae in ſolutione praecedente poſtulabatur, ita vt iſta ſolutio ab illa non aliter niſi modo inueſtigationis diſcrepet. Hic vero fundamentum totius ſolutionis multo clarius perſpicitur. Nunc igitur eam inueſtigationem aggrediamur, quam ſupra ſumus polliciti; quemadmodum ſcilicet binae tales formulae indagari queant, quarum productum quadratum efficiat.

Quaeſtio.

Inueſtigare binas huiusmodi formulas:

$$\frac{pp + rr}{2pr} \text{ et } \frac{qq + ss}{2qs},$$

quarum productum fiat quadratum.

Solutio.

§. 21. Cum igitur iſtud productum debeat fieri quadratum, per quadratum $4pprrqqss$ multiplicando etiam hoc productum quadratum reddi debet:

$$pr(pp + rr) \times qs(qq + ss);$$

vbi id commodum ſumus adepti, vt prior factor tantum literas p et r, poſterior vero ſolas q et s contineat, cui conditioni vtique perfectiſſime ſatisfieret, ſi vtraque formula $pr(pp + rr)$ et $qs(qq + ss)$ ſeorſim quadratum effici poſſet. Verum iam dudum demonſtratum eſt, hoc pror-

prorſus eſſe impoſſibile. Quia enim producti prioris factores p, r, $(pp+rr)$ ſunt primi inter ſe, neceſſe foret, vt ſinguli eſſent quadrata. Poſito ergo $p=tt$ et $r=uu$, tertius factor quadratus efficiendus foret t^4+u^4. Demonſtratum autem eſt, ſummam duorum biquadratorum quadratum reddi nunquam poſſe.

§. 22. Cum igitur ambae hae formulae:

$$pr(pp+rr) \text{ et } qs(qq+ss)$$

ipſae quadrata eſſe nequeant, neceſſe eſt, vt ſint *numeri planiſimiles*, vti ab *Euclide* vocantur. Quanquam autem ad hoc efficiendum quatuor habemus quantitates indeterminatas p, r, q, s, tamen nullo modo ſolutio generalis adhuc inueſtigare potuit; quam ob cauſſam tantum ſolutionibus particularibus contenti eſſe debemus, quae etiam maximas difficultates inuoluunt, niſi iſtas formulas in aliam ſpeciem tranſmutemus, quod commodiſſime hoc modo fiet. Ponatur $p=2fg$ et $r=ff-gg$; ſimilique modo $q=2hk$ et $s=hh-kk$, hocque modo ambae noſtrae formulae euadent

$$2fg(ff-gg)(ff+gg)^2 \text{ et } 2hk(hh-kk)(hh+kk)^2.$$

Quia igitur poſtremi factores ſponte ſunt quadrata, ſupereſt, vt hoc productum:

$$2fg(ff-gg)\times 2hk(hh-kk)$$

reddatur quadratum, ſiue, quod eodem redit, hoc:

$$fg(ff-gg).\ hk(hh-kk),$$

et quia hic etiam quatuor literae inſunt, vt eas ad pauciorem numerum reducamus, ſtatuamus $h=g$ et $k=f-g$; hoc modo poſterior formula erit $fg(f-g)(2g-f)$, quae

per priorem multiplicata, omiſſis factoribus quadratis, praebet hoc productum: $(f+g)(2g-f)$ quadratum efficiendum. Hunc in finem ponatur

$$f=\frac{2mm-nn}{3} \text{ et } g=\frac{mm+nn}{3}.$$

ſiue, quia vtriusque literae aeque multipla ſumere licet, ſumamus

$$f=2mm-nn \text{ et } g=mm+nn, \text{ vnde fiet}$$
$$h=mm+nn \text{ et } k=mm-2nn.$$

§. 23. Hinc ergo pro lubitu innumerabilia paria binarum talium formularum:

$$fg(ff-gg) \text{ et } hk(hh-kk)$$

erui poterunt, quarum productum certe erit quadratum. Veluti ſi ſumamus $m=2$ et $n=1$, habebimus hos valores:

$$f=7;\ g=5;\ h=5;\ k=2.$$

Hinc enim fit

$$fg(ff-gg)=840 \text{ et } hk(hh-kk)=210,$$

quarum productum eſt $4.\ 210^2$.

§. 24. Verum hoc modo valores literarum p, r, q, s, mox prodirent ſatis enormes, quia poſuimus

$$p=2fg,\ r=ff-gg;\ q=2hk \text{ et } s=hh-kk,$$

qui in exemplo allato fierent

$$p=70;\ q=20;\ r=24;\ s=21,$$

vbi bini p et r per 2 depreſſi euadent $p=35$ et $r=12$; ita vt noſtrum productum vtique ſit quadratum, ſcilicet:

$$3^2.\ 4^2.\ 5^2.\ 7^2.\ 29^2.\ 37^2.$$

Verum

Verum quia hi numeri ex caſu ſimpliciſſimo, pro *m* et *n* ſumto, ſunt orti, facile intelligitur, ex maioribus valoribus, pro *m* et *n* ortis, pro literis *p*, *r*, *q*, *s* mox maximos numeros eſſe prodituros.

§. 25. Cum igitur pro noſtro Problemate Solutiones potiſſimum ſimpliciores intendamus, iſtae formulae, ad quas ſumus perducti, ad hunc ſcopum neutiquam ſunt accommodatae; vnde longe aliam viam inire conueniet, quae ita ſit comparata, vti non ad numeros nimis magnos pro literis *p*, *r*, *q*, *s*, perducat, et quae ſimul ſimpliciſſimas ſolutiones certiſſime exhibeat, id quod ſequenti modo commodiſſime praeſtabitur. Cum $ab(aa+bb)$ ſit forma vtriusque formulae, qua indigemus, pro *a* et *b* ſucceſſiue accipiamus numeros ſimpliciores, et productum reuocemus ad hanc formam: $A^2 F$, vbi A^2 complectatur omnes factores quadratos, F vero ſit productum ex factoribus non quadratis. Pro noſtro igitur inſtituto eiusmodi duae pluresue formulae requiruntur, quae pro F eundem valorem praebeant, quandoquidem tales pro binis noſtris formulis $pr(pp+rr)$ et $qs(qq+ss)$ accipere licebit. Hunc in finem ſequentem tabulam adiungimus, quae pro ſingulis valoribus literarum *a* et *b* numeros litera F indicatos exhibeat, et quoniam conſultum eſt in valoribus ſimplicioribus ſubſiſtere, hinc omittamus omnes numeros primos maiores quam 13.

a	*b*	F
2	1	2.5
3	1	2.3.5
3	2	2.3.13
4	3	3
5	1	2.5.13
7	1	2.7
7	4	5.7.13
8	1	2.5.13
9	7	2.5.7.13
11	2	2.5.11
11	3	2.3.5 11.13
12	5	3.5
13	9	2.5.13
15	8	2.3.5
18	1	2.13

§. 26. Hanc autem tabulam vlterius continuare licet, ſtatuendo $a = 2fg$ et $b = ff - gg$; tum enim tantum formulam $2fg(ff-gg)$ examinare ſufficiet. Hinc ergo ſimilem tabulam pro numeris f et g ſubiungamus, adſcriptis ſimul valoribus litterarum a et b, et vltima columna valores literae F indicabit:

f	g	a	b	F	f	g	a	b	F
2	1	4	3	3	8	1	16	63	7
3	2	12	5	3.5	8	3	48	55	3.5.11
4	1	8	15	2.3.5	8	5	80	39	3.5.13
4	3	24	7	2.3.7	8	7	112	15	3.5.7
5	2	20	21	3.5.7	9	2	36	77	7.11
5	4	40	9	2.5	9	4	72	65	2.5.13
6	1	12	35	3.5.7	10	1	20	99	5.11
6	5	60	11	3.5.11	10	3	60	91	3.5.7.13
7	2	28	45	5.7	11	2	44	117	11.13
7	4	56	33	2.3.7.11	11	4	88	105	2.3.5.7.11
7	6	84	13	3.7.13	11	10	220	21	3.5.7.11

§. 27. Iam ex his duabus tabulis coniunctis excerpamus eos caſus, quibus eadem litera F conuenit.

F	a	b	F	a	b
2.5	2	1		5	1
	40	9	2.5.13	8	1
	3	1		13	9
2.3.5	15	8		72	65
				21	20
			3.5.7	35	12
				112	15
				60	11
			3.5.11	55	48

§. 28. Ex his iam caſibus plurimae Solutiones noſtri Problematis, quo quaeruntur quatuor numeri x, y, z, v,

z, v, quibus formula biquadratica, in Problemate propoſita, ſigno V indicata, reuera ad nihilum redigitur, deduci poſſunt, quarum iam plures in exemplis allatis ſunt datae, quas igitur hic conſpectui coniunctim exponamus:

x	20	39	185	672	78	39.89	25.1121	20.433	6.109
y	17	25	148	112	65	25.89	12.1121	17.433	5.109
z	17	20	39	39	29	672	39.769	17.111	29 11
v	12	12	12	25	24	112	20.769	12.111	24.11

vbi, quia literae x, y, z, inter ſe permutari poſſunt, maximos valores ipſi x tribuimus, hincque deſcendentes pro y et z ſcripſimus. Semper autem minimus valor literae v competit.

Problema II.

Propoſita formula biquadratica

$$V = x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2xxvv$$
$$- 2yyzz - 2yyvv - 2zzvv$$

inueſtigare valores quatuor numerorum x, y, z, v. vt iſta formula nihilo fiat aequalis. Quod Problema etiam ita enunciari poteſt: *Quaerantur quatuor quadrata, xx, yy, zz, vv. quorum ſi ponatur ſumma $= \Sigma$, et ſumma factorum ex binis $= \Pi$, vt ſit $\Sigma^2 = 4\,\Pi$.*

§. 29. Quod ſi tales valores pro literis x, y, z, v fuerint inuenti, ſimul ſequentes formulae reddentur quadrata, quorum radices ita ſe habebunt:

I. $2\sqrt{(xxyy + zzvv)} = xx + yy - zz - vv$

II. $2\sqrt{(xxzz + yyvv)} = xx + zz - yy - vv$

III.

III. $2\sqrt{(xxvv+yyzz)}=xx+vv-yy-zz$

IV. $2\sqrt{(xxyy+xxzz+yyzz)}=xx+yy+zz-vv$

V. $2\sqrt{(xxyy+xxvv+yyvv)}=xx+yy+vv-zz$

VI. $2\sqrt{(xxzz+xxvv+zzvv)}=xx+zz+vv-yy$

VII. $2\sqrt{(yyzz+yyvv+zzvv)}=yy+zz+vv-xx$

quibus addi poteſt

VIII. $2\sqrt{\Pi}=xx+yy+zz+vv.$

In hoc igitur Problemate quaterni numeri x, y, z, v, aequaliter ingrediuntur, cum in priore Problemate quadrati vv ratio fuiſſet diuerſa.

Solutio huius Problematis.

§. 30. Solae priores formulae hic iterum ſufficiunt ad totam ſolutionem abſoluendam. Cum enim formula $xxyy+zzvv$ debeat reddi quadratum, hoc eueniet, ſumendo

$$xy=zv\frac{(pp-rr)}{2pr};$$

tum enim erit

$$\sqrt{(xxyy+zzvv)}=\frac{zv(pp+rr)}{2pr},$$

ideoque

$$=\tfrac{1}{2}(xx+yy-zz-vv).$$

Simili modo pro ſecunda formula ſi ſumatur

$$xz=\frac{yv(qq-ss)}{2qs} \text{ erit}$$

$$\sqrt{(xxzz+yyvv)}=\frac{yv(qq+ss)}{2qs}=$$
$$\tfrac{1}{2}(xx+zz-yy-vv).$$

§. 31. Cum igitur habeamus has duas aequationes:

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp - rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq - ss}{2qs}$$

earum productum dabit

$$\frac{xx}{vv} = \frac{(pp - rr)(qq - ss)}{4prqs};$$

prior vero per poſteriorem diuiſa dabit

$$\frac{yy}{zz} = \frac{qs(pp - rr)}{pr(qq - ss)},$$

atque nunc vtrique conditioni ſatisfiet, dummodo fuerit

$$\frac{(pp - rr)(qq - ss)}{prqs} = \square.$$

Quomodo igitur hoc effici debeat in ſequentibus fuſius docebimus. Interim vero hic aſſumamus, tales valores pro literis p, q, r, s, nobis eſſe cognitos.

§. 32. Statuere igitur poterimus

$$\frac{xx}{vv} = \frac{aa}{bb} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{cc}{dd},$$

vbi ergo numeri a, b, c, d, vt cogniti ſpectantur. Quamobrem hinc ponamus $x = at$, $v = bt$, $y = cu$, $z = du$, ſicque totum negotium nunc eo eſt reductum, vt ambo numeri t et u debite aſſignentur. Pro priore igitur radice quadrata $\frac{zv(pp + rr)}{2r}$ habebimus $zv = bdtu$; vnde ſi ſtatuamus breu. gr. $\frac{bd(pp + rr)}{2pr} = m$, ſimilique modo pro altera radice (ob $yv = bctu$) $\frac{bc(qq + ss)}{2qs} = n$, ambo radices erunt mtu et ntu.

§. 33. Pro priore igitur radice habebimus

$$2mtu = xx + yy - zz - vv;$$

pro altera vero

$$2ntu = xx + zz - yy - vv,$$

qua-

quarum ſumma dabit

$$(m+n)tu = xx - vv = (aa - bb)tt,$$

vnde ſtatim deducitur $\frac{t}{u} = \frac{m+n}{aa-bb}$. Simili modo differentia dabit

$$(m-n)tu = yy - zz = (cc - dd)uu,$$

vnde etiam deducimus $\frac{t}{u} = \frac{cc-dd}{m-n}$, qui duo valores per ipſam quaeſtionis naturam inter ſe congruere debebunt. At vero quia m et n per extractionem radicis ſunt natae, eas tam negatiue quam poſitiue accipere licebit, vnde ſimul gemini valores pro t et u reperientur, quibus inuentis tota Problematis Solutio ita ſe habebit:

$$x = a(m+n);\ v = b(m+n);$$

$$y = c(aa-bb);\ z = d(aa-bb);$$

vnde facile erit exempla quotcunque euoluere.

Exemplum 1.

quo ſumitur $p = 5$, $r = 2$, $q = 6$ et $s = 1$.

§. 34. Hic igitur erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{21}{20}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{35}{12}$;

vnde oritur

$\frac{xx}{vv} = \frac{7^2}{4^2}$, ideoque $a = 7$ et $b = 4$;

tum vero erit

$\frac{yy}{zz} = \frac{3^2}{5^2}$, ergo $c = 3$ et $d = 5$;

vnde fiet $m = 29$ et $n = 37$. Cum autem ſit $m = \pm 29$, duplex ſolutio ita ſe habebit:

$$x = 7(37 \pm 29);\ v = 4(37 \pm 29);\ y = 99;\ z = 165.$$

Signa igitur ſuperiora praebent hanc ſolutionem:

$$x = 14;\ v = 8;\ y = 3;\ z = 5;$$

inferiora vero

$$x = 56;\ v = 32;\ y = 99;\ z = 165.$$

Exemplum 2.

quo $p = 5$, $r = 2$, $q = 8$, $s = 7$.

§. 35. Hic erit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{21}{20} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{15}{112},$$

vnde oritur

$$\frac{xx}{vv} = \frac{3^2}{8^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{14^2}{5^2}.$$

Sumatur ergo $a = 3$; $b = 8$; $c = 14$; $d = 5$, fietque $m = 58$ et $n = 113$. Verum ob $m = \pm 58$ duplex oritur ſolutio, ſcilicet:

$$x = 3(113 \pm 58);\ v = 8(113 \pm 58);$$

$$y = 14.55 \text{ et } z = 5.55.$$

Hinc hae duae ſolutiones:

$$x = 3;\ v = 8;\ y = 14;\ z = 5.$$

$$x = 3.171;\ v = 8.171;\ y = 14.55;\ z = 5.55.$$

Exemplum 3.

quo $p = 6$; $r = 1$; $q = 8$; $s = 7$.

§. 36. Hoc caſu fit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{35}{12} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{15}{112}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{8^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{14^2}{3^2}.$$

Sum-

Sumto igitur

$a = 5$; $b = 8$; $c = 14$; $d = 3$ erit

$m = \pm 74$ et $n = 113$, hincque

$x = 5(113 \pm 74)$ et $v = 8(113 \pm 74)$;

vnde hae duae ſolutiones oriuntur:

$x = 5$; $v = 8$; $y = 14$; $z = 3$.

$x = 5 \cdot 187$; $v = 8 \cdot 187$; $y = 14 \cdot 39$; $z = 3 \cdot 39$.

Exemplum 4.

quo $p = 6$, $r = 5$; $q = 8$; $s = 3$.

§. 37. Cum hinc ſit

$\frac{xy}{zv} = \frac{11}{60}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{55}{48}$, erit

$\frac{xx}{vv} = \frac{11^2}{24^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{2^2}{5^2}$, ideoque

$a = 11$; $b = 24$; $c = 2$; $d = 5$;

hinc ob $m = 122$ et $n = 73$, erit

$x = 11(122 \pm 73)$ et $v = 24(122 \pm 73)$;

vnde ſequentes deducuntur ſolutiones:

$x = 11 \cdot 49$; $v = 24 \cdot 49$; $y = 2 \cdot 455$; $z = 5 \cdot 455$;

$x = 33$; $v = 72$; $y = 14$; $z = 35$.

§. 38. Si quis plura huiusmodi exempla euoluere voluerit, quoniam totum negotium eo redit, vt pro p, r, q, s, idonei valores exhiberi queant, ad hoc efficiendum ſequentem regulam adiungamus.

Regula, pro inueniendis numeris idoneis, pro p, r, q, s.

§. 39. Si f et g denotent numeros quoscunque ſiue poſitiuos ſive negatiuos, ſemper accipi poterit

$$p = fg \text{ et } r = (2g + f)(3g + 2f);$$

tum vero ſumi poterunt duplici modo pro q et s valores debiti, ſcilicet:

$$q = (2g + f)(3g + f) \text{ et } s = f(f + g), \text{ vel}$$

$$q = (f + g)(3g + 2f) \text{ et } s = g(3g + f);$$

vbi notandum, ſi bini tales numeri habeant factorem comunem, eum omitti poſſe; ac ſi eueniat, vt tales numeri prodeant negatiui, eorum loco ſemper poſitiuos ſcribere licebit. Ita ſi pro f et g vnitas accipiatur, erit $p = 1$ et $r = 15$; tum vero habebitur vel

$$q = 6 \text{ et } s = 1, \text{ vel } q = 5 \text{ et } s = 2,$$

vbi inſuper notaſſe iuuabit, loco binorum talium numerorum etiam eorum ſemi-ſummam et ſemi-differentiam accipi poſſe. Ita loco $p = 1$ et $r = 15$ ſumi poterit $p = 8$ et $r = 7$, quem caſum in exemplis ante allatis expediuimus.

Solutio ex calculo angulorum petita.

§. 40. Pro hoc igitur Problemate ſtatuamus $\frac{xy}{zv} = \frac{\text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,\alpha}$; tum enim erit

$$\sqrt{(xxyy + zzvv)} = \frac{zv}{\text{ſin.}\,\alpha} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz - vv).$$

Tum vero ſtatuatur

$\frac{xz}{yv} = \frac{\text{coſ.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\beta}$, ac tum habebitur

$$\sqrt{(xxzz + yyvv)} = \frac{yv}{\text{ſin.}\,\beta} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy - vv).$$

§. 41.

§. 41. Iam his duabus formulis combinandis habebimus primo

$$\frac{xx}{vv} = \frac{\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta} = \text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta,$$

vnde ponatur $x = t\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta}$ et $v = t$. Simili modo habebitur

$$\frac{yy}{zz} = \frac{\text{cot.}\,\alpha}{\text{cot.}\,\beta},$$ vnde ponatur

$$y = u\sqrt{\text{cot.}\,\alpha} \text{ et } z = u\sqrt{\text{cot.}\,\beta}.$$

Subſtituantur hi valores in priore aequatione radicali, fietque

$$\frac{2tu\sqrt{\text{cot.}\,\beta}}{\text{ſin.}\,\alpha} = tt(\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta - 1) + uu(\text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta),$$

vnde colligitur

$$\frac{u}{t} = \frac{\frac{\sqrt{\text{cot.}\,\beta}}{\text{ſin.}\,\alpha} \pm \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha}}{\text{ſin.}\,\beta}}{\text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta}.$$

Statuatur ergo

$$u = \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\beta}}{\text{ſin.}\,\alpha} \pm \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha}}{\text{ſin.}\,\beta} \text{ et } t = \text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta,$$

et quatuor valores quaeſiti erunt

$$x = \text{cot.}\,\alpha\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta} - \text{cot.}\,\beta\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta},$$

$$v = \text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta;\ y = \frac{\text{cot.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,\beta} + \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta}}{\text{ſin.}\,\alpha}$$

$$z = \frac{\text{cot.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\alpha} + \frac{\sqrt{\text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\beta}}{\text{ſin.}\,\beta}.$$

§. 42. Vt igitur iſti valores fiant rationales, ante omnia neceſſe eſt, vt tam ſinus quam coſinus angulorum α et β, tum vero etiam, vt $\sqrt{\alpha\,\text{cot.}\,\beta}$, fiant rationales. Priori ſatisfit, ponendo

$$\text{ſin.}\,\alpha = \frac{2pr}{pp+rr} \text{ et } \text{ſin.}\,\beta = \frac{2qs}{qq+ss},$$

tum enim fiet

$$\text{coſ.}\,\alpha = \frac{pp-rr}{pp+rr} \text{ et } \text{coſ.}\,\beta = \frac{qq-ss}{qq+ss}$$

 ideo-

ideoque

$$\cot.\alpha = \frac{pp-rr}{2pr} \text{ et } \cot.\beta = \frac{qq-ss}{2qs}.$$

Quamobrem requiritur, vt productum $\frac{(pp-rr)(qq-ss)}{pqrs}$ fiat quadratum, ſicque deducimur ad ipſam ſolutionem ante inuentam, et quia hoc modo ipſa aequatio biquadratica adimpletur, ſimul omnes ſeptem formulae ſupra memoratae euadent quadrata.

§. 43. Colligamus iam caſus in exemplis ſuperioribus euolutos, atque ſimul plures caſus habebimus, quibus huic aequationi biquadraticae ſatisfit, ſcilicet:

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2xxvv$$
$$- 2yyzz - 2yyvv - 2zzvv = 0,$$

et quia literae x, y, z, v, inter ſe permutari patiuntur, valores ſupra inuentos ſecundum ordinem magnitudinis diſponamus.

$x =$	14	72	165	8, 171	8, 187	5, 455
$y =$	8	35	99	14, 55	5, 187	24, 49
$z =$	5	33	56	3, 171	14, 39	2, 455
$v =$	3	14	32	5, 55	3, 39	11, 49

GEMINA

GEMINA METHODVS
INVESTIGANDI VALOREM PRODVCTI

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$$

DVM AMBO INTEGRALIA A TERMINO $x=0$ VSQVE AD TERMINVM $x=1$ EXTENDVNTVR.

Auctore

NICOLAO FVSS.

Prior Methodus.

§. 1.

Deſignetur propoſitum binorum integralium productum, compendii gratia, littera S, vt ſit

$$S=\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} \begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix}$$

(modus, terminos integrationis notandi, hic adhibitus, nulla explicatione indigebit), eritque differentiando

$$dS=\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}\int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}+\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}};$$

vbi iam id commodi ſumus adepti, vt in huius expreſſionis

onis vtroque membro vnicus tantum factor integralis occurrat.

§. 2. Statuatur iam porro prior pars differentialis

$$\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} = dP,$$

altera vero

$$\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = dQ,$$

ita vt habeamus hanc aequationem differentialem:

$dS = dP + dQ$, ideoque integrando $S = P + Q$.

Totum igitur negotium eo redit, vt valores literarum P et Q ex binis aequationibus differentialibus modo allatis integrando eruantur.

§. 3. Hunc in finem conſideretur primo prior harum aequationum, quae erat:

$$dP = \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}},$$

pro qua integranda notetur eſſe

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} = 1 + \frac{\beta}{n}x^n + \frac{\beta(\beta+n)}{n.2n}x^{2n} + \frac{\beta(\beta+n)(\beta+2n)}{n.2n.3n}x^{3n} + \text{etc.}$$

vnde, per $x^{\alpha-1}\,dx$ multiplicando et integrando, colligitur

factor

factor integralis

$$\int \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} = \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{n} \cdot \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n} + \frac{\beta(\beta+n)}{n.2n} \cdot \frac{x^{\alpha+2n}}{\alpha+2n}$$

$$+ \frac{\beta(\beta+n)(\beta+2n)}{n.2n.3n} \cdot \frac{x^{\alpha+3n}}{\alpha+3n} + \text{etc.}$$

haecque ſeries, in factorem alterum $\frac{x^{a-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$ ducta et integrata, praebebit valorem quaeſitum P.

§. 4. Cum igitur, facta multiplicatione, primus valoris integralis terminus euadat

$$\int \frac{x^{a+\alpha-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}},$$

reliqui autem omnes, puta:

$$\int \frac{x^{a+\alpha+n-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}};\ \int \frac{x^{a+\alpha+2n-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}};\ \text{etc.}$$

ad priorem reduci patiantur, ponatur ille

$$\int \frac{x^{a+\alpha-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \Gamma$$

et quo reductio facilior reddatur, ſequens inſtituatur operatio generalis, ad Lemma generale, in ſubſidium vocandum, perducens.

§. 5. Cum exponentes ipſius x in numeratoribus

continuo numero n creſcant, conſideretur haec formula integralis: $\int \frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$, quae ad hanc ſimpliciorem:

$$\int \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$$ ſit reuocanda. Hunc in finem ſtatuatur illa formula

$$\int \frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = A\int \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + B\,x^f (1-x^n)^{1-\frac{b}{n}}$$

et ſumtis differentialibus erit

$$\frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{A\,x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + B f x^{f-1}\,dx\,(1-x^n)^{1-\frac{b}{n}}$$
$$- B(n-b)\,x^{f+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{-\frac{b}{n}}$$

quae aequatio, ducta in $\sqrt[n]{(1-x^n)^b}$ et diuiſa per $x^{f-1}dx$, ad hanc ſimpliciorem reducitur:

$$x^n = A + Bf(1-x^n) - B(n-b)\,x^n,$$

ex qua ambo coefficientes A et B facili negotio determinantur, cum, aequando inter ſe terminos abſolutos, itemque terminos litteram x continentes, fieri debeat

$$Bf + A = 0 \text{ et } B(f+n-b) = -1.$$

Hinc enim colligitur

$$B = \frac{-1}{f+n-b} \text{ et } A = \frac{f}{f+n-b}:$$

quibus

quibus ſubſtitutis in aequatione aſſumta, fiet

$$\int \frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{f}{f+n-b} \int \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}};$$

terminus enim abſolutus, littera B affectus, poſito $x = 1$, in nihilum abit.

§. 6. Beneficio igitur huius Lemmatis valores integrales terminorum ſeriei pro P inuentae, quae eſt

$$P = \frac{1}{\alpha}.\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + \frac{\beta}{n}.\frac{1}{\alpha+n}.\int \frac{x^{a+\alpha+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$$

$$+ \frac{\beta(\beta+n)}{n.2n}.\frac{1}{\alpha+2n}.\int \frac{x^{a+\alpha+2n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + \text{etc.}$$

ſequenti modo per priorem Γ exprimentur:

$$\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \Gamma.$$

$$\int \frac{x^{a+\alpha+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b}\,\Gamma.$$

$$\int \frac{x^{a+\alpha+2n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b}.\frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b}\,\Gamma.$$

$$\int \frac{x^{a+\alpha+3n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b}.\frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b}.$$

$$\frac{a+\alpha+2n}{a+\alpha+3n-b}\,\Gamma. \text{ etc.}$$

Subſtitutio horum valorum in ſerie modo allata hanc ſup-

peditat expreſſionem pro priore parte:

$$P = \Gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{n} \cdot \frac{1}{\alpha+n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b} + \frac{\beta(\beta+n)}{n.\,2n} \cdot \frac{1}{\alpha+2n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b} \\ + \frac{\beta(\beta+n)(\beta+2n)}{n.\,2n.\,3n} \cdot \frac{1}{\alpha+3n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b} \cdot \frac{a+\alpha+2n}{a+\alpha+3n-b} \cdot \end{array} \right.$$

§. 7. Hoc valore pro P inuento, ſuperfluum foret, easdem operationes pro altera parte Q, valoris quaeſiti, repetere. Ex inſpectione enim expreſſionis per dQ deſignatae, eiusque cum formula dP comparatione, facile perſpicitur, illam ab hac non niſi in hoc diſcrepare, quod exponentes a et α, itemque b et β ſint permutati. Dummodo ergo in Serie pro P inuenta ſcribamus litteram α loco a, tum vero β loco b, et vice verſa, reliquis operationibus prolixioribus ſuperſedere poterimus. Hoc enim facto fiet:

$$Q = \Delta \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{b}{n} \cdot \frac{1}{a+n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-\beta} + \frac{b(b+n)}{n.\,2n} \cdot \frac{1}{a+2n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-\beta} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-\beta} \\ + \frac{b(b+n)(b+2n)}{n.\,2n.\,3n} \cdot \frac{1}{a+3n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-\beta} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-\beta} \cdot \frac{a+\alpha+2n}{a+\alpha+3n-\beta} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

denotante Δ valorum formulae integralis $\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$, quem ſcilicet, pro iisdem integrationis terminis, (ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$) recipit.

§. 8. Inuentis autem valoribus litterarum P et Q, innoteſcit ſimul valor quaeſitus producti propoſiti. Summa enim ambarum ſerierum modo traditarum exhibebit valorem litterae S, qua ſupra iſtud productum:

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$$

deſigna-

deſignauimus, ſumtis integralibus ab $x=0$ ad $x=1$. Harum ſerierum vſum ſequentibus exemplis illuſtraſſe, operae pretium erit.

Exemplum I.

§. 9. Sit propoſitum hoc productum binorum integralium:

$$S=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\times\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

cuius valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extenſum, inueſtigari oporteat. Cum igitur hoc caſu ſit

$$n=3;\ a=1;\ b=2;\ \alpha=2;\ \beta=1,$$

erit primo

$$\Gamma=\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\ \text{et}\ \Delta=\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

quas duas formulas ante omnia, habito reſpectu terminorum integrationis, integrari oportet.

§. 10. Pro priore formula integranda ponatur $1-x^3=z^3$, eritque

$$\int\frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=-\int dz,\ \text{ideoque}$$

$$\Gamma=C-z=C-\sqrt[3]{(1-x^3)},$$

vbi conſtans C ita determinari debet, vt poſito $x=0$ valor Γ in nihilum abeat. Erit igitur $C=1$, ideoque

$\Gamma = 1 - \sqrt[3]{(1 - x^3)}$, poſitoque $x = 1$ erit pro terminis integrationis praeſcriptis $\Gamma = 1$. Pro altera formula Δ, ſi ponatur $1 - x^3 = z^3$, ob differentiale $x\,x\,d\,x = -\,z\,z\,d\,z$ erit

$$\Delta = -\int z\,d\,z = C - \tfrac{1}{2}\,z\,z,$$

vnde pro iisdem terminis integrationis adipiſcimur $\Delta = \frac{1}{2}$.

§. 11. Subſtituantur igitur in ſeriebus pro P et Q inuentis valores Γ et Δ modo eruti, tum vero loco n, a, b, α, β debiti valores ſcribantur, quo facto elicitur

$$P = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1.4}{3.6} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{3.6}{4.7} + \tfrac{1.4.7}{3.6.9} \cdot \tfrac{1}{11} \cdot \tfrac{3.6.9}{4.7.10} + \tfrac{1.4.7.10}{3.6.9.12} \cdot \tfrac{1}{14} \cdot \tfrac{3.6.9.12}{4.7.10.13} + \text{etc.}$$

$$Q = \tfrac{1}{2} \left\{ 1 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{5} + \tfrac{2.5}{3.6} \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{3.6}{5.8} + \tfrac{2.5.8}{3.6.9} \cdot \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{3.6.9}{5.8.11} + \tfrac{2.5.8.11}{3.6.9.12} \cdot \tfrac{1}{13} \cdot \tfrac{3.6.9.12}{5.8.11.14} + \text{etc.} \right\}$$

quae autem ambae ſeries, depreſſione, quantum fieri poteſt, inſtituta, ſequentem induunt formam concinniorem:

$$P = \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{4.5} + \tfrac{1}{7.8} + \tfrac{1}{10.11} + \tfrac{1}{13.14} + \text{etc.}$$

$$Q = \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{4.5} + \tfrac{1}{7.8} + \tfrac{1}{10.11} + \tfrac{1}{13.14}$$

vbi iam manifeſtum eſt, fieri $Q = P$, ita vt valor producti propoſiti ſit $S = 2\,P$.

§. 12. Iam pro inueſtiganda ſumma ſeriei pro P inuentae fingatur eſſe

$$P = \tfrac{x^2}{1.2} + \tfrac{x^5}{4.5} + \tfrac{x^8}{7.8} + \tfrac{x^{11}}{10.11} + \text{etc.}$$

eritque

eritque, ſi bis differentietur et per $d x^2$ diuidatur,

$$\frac{d d P}{d x^2} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \text{etc.}$$

Conſtat autem ſumma huius ſeriei $= \frac{1}{1-x^3}$, ita vt ſit

$$\frac{d d P}{d x^2} = \frac{1}{1-x^3},$$

vnde integrando colligitur

$$\frac{d P}{d x} = \int \frac{d x}{1+x^3},$$

hinc per $d x$ multiplicando denuoque integrando erit

$$P = \int d x \int \frac{d x}{1-x^3}.$$

§. 13. Hic ergo formulam adepti ſumus duplici ſigno ſummatorio implicatam; verum alterum eorum eliminatur ope reductionis notiſſimae $\int p\, d q = p q - \int q\, d p$. Poſito enim

$p = \int \frac{d x}{1-x^3}$ et $d q = d x$, ob $d p = \frac{d x}{1-x^3}$ et $q = x$ fiet

$$\int d x \int \frac{d x}{1-x^3} = x \int \frac{d x}{1-x^3} - \int \frac{x\, d x}{1-x^3},$$

vnde poſito, vti requiritur, factore finito $x = 1$, erit

$$P = \int \frac{d x}{1-x^3} - \int \frac{x\, d x}{1-x^3}.$$

§. 14. Ex elementis autem Calculi integralis notum eſt eſſe

$$\int \frac{d x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3} l(1-x) + \tfrac{1}{6} l(1+x+x x) + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{3}}{2+x}$$

$$\int \frac{x\, d x}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3} l(1-x) + \tfrac{1}{6} l(1+x+x x) - \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{3}}{2+x}.$$

Facta igitur horum valorum ſubſtitutione obtinetur

$$P = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{3}}{2+x};$$

integrali vero vsque ad terminum praeſcriptum $x = 1$ extenſo, fit

$$P = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

En

En ergo nacti ſumus valorem producti propoſiti per quadraturam circuli expreſſum, cum ſit.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exemplum II.

§. 15. Propoſitus ſit inueſtigandus valor huius producti:

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix}.$$

Hoc quidem productum in forma generali non contentum ideoque omnem applicationem reſpuere videtur, quia ſimul fieri nequit $n = 2$ et $n = 4$; verum facile ad caſum generalem accommodari poteſt, loco $\sqrt{(1-x^4)}$ ſcribendo $\sqrt[4]{(1-x^4)^2}$, ita vt productum propoſitum ſit

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}.$$

§. 16. Cum igitur pro hoc caſu habeamus

$$n = 4;\ a = 1;\ b = 2;\ \alpha = 3;\ \beta = 2,$$

ambo factores communes, ſeriebus praepoſiti, erunt

$$\Gamma = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \text{ et } \Delta = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}};$$

ideoque $\Delta = \Gamma$. Pro hac formula $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$ integranda ſtatuatur $1 - x^4 = z^4$, ita vt, ob

$x^3\,dx$

$$x^3\,dx = -z^3\,dz \text{ et } \sqrt[4]{(1-x^4)^2} = zz, \text{ fiat}$$
$$\Gamma = -\int z\,dz = C - \tfrac{1}{2}zz.$$

Hinc, poſito $x = 0$, fiet $C = 1$, ideoque $\Gamma = 1 - \frac{1}{2}zz$; tum vero ſumto $x = 1$ erit

$$\Gamma = \Delta = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \left[\begin{matrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{matrix}\right] = \tfrac{1}{2}.$$

Hic valor pro Γ et Δ inuentus, ſi, una cum valoribus pro n, a, α, b, β, in ſeriebus pro P et Q datis ſubſtituatur, prodibit

$$P = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2.6}{4.8}\cdot\tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{4.8}{6.10} + \tfrac{2.6.10}{4.8.12}\cdot\tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{4.8.12}{6.10.14} + \text{etc.}\right)$$
$$Q = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2.6}{4.8}\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{4.8}{6.10} + \tfrac{2.6.10}{4.8.12}\cdot\tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{4.8.12}{6.10.14} + \text{etc.}\right)$$

quae expreſſiones, depreſſione facta, ad has reducuntur:

$$P = \tfrac{1}{2.3} + \tfrac{1}{6.7} + \tfrac{1}{10.11} + \tfrac{1}{14.15} + \text{etc.}$$
$$Q = \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{5.6} + \tfrac{1}{9.10} + \tfrac{1}{13.14} + \text{etc.}$$

§. 17. Quo ſummas harum duarum ſerierum commode colligere queamus, fingamus primo pro P iſtam ſeriem:

$$P = \tfrac{x^3}{2.3} + \tfrac{x^7}{6.7} + \tfrac{x^{11}}{10.11} + \tfrac{x^{15}}{14.15} + \text{etc.}$$

eritque bis differentiando

$$\tfrac{ddP}{dx^2} = x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \text{etc.} = \tfrac{x}{1-x^4};$$

hinc retrogrediendo erit

$$\tfrac{dP}{dx} = \int \tfrac{x\,dx}{1-x^4} \text{ et } P = \int dx \int \tfrac{x\,dx}{1-x^4}.$$

Hic vt ſupra in exemplo praecedente adhibeamus Lemma $\int p\,dq = pq - \int q\,dp$, quod nobis iſtam ſubminiſtrat expreſſionem:

$$P = x\int\frac{x\,d\,x}{1-x^4} - \int\frac{x\,x\,d\,x}{1-x^4} = \int\frac{x\,d\,x}{1-x^4} - \int\frac{x\,x\,d\,x}{1-x^4}$$

quia factorem finitum x vnitati ſtatim aequare licet. Iam vero conſtat eſſe

$$\int\frac{x\,d\,x}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+x}{1-x} + \tfrac{1}{4}\,l\,(1+x\,x)$$

$$\int\frac{x\,x\,d\,x}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+x}{1-x} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x\,;$$

vnde, facta ſubſtitutione, colligitur

$$P = \tfrac{1}{4}\,l\,(1+x\,x) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x\,,$$

ſiue poſito $x = 1$ erit

$$P = \tfrac{1}{4}\,l\,2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{4}.$$

§. 18. Pro altero valore Q determinando fingatur ſimili modo

$$Q = \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^6}{5.\,6} + \frac{x^{10}}{9.\,10} + \frac{x^{14}}{13.\,14} + \mathrm{etc.}$$

ſumtisque differentio-differentialibus erit

$$\frac{d\,d\,Q}{d\,x^2} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \mathrm{etc.} = \frac{1}{1-x^4},$$

ita vt iterum integrando fiat

$$\frac{d\,Q}{d\,x} = \int\frac{d\,x}{1-x^4} \text{ et } Q = \int d\,x\int\frac{d\,x}{1-x^4}\,;$$

hincque reducendo vt ſupra

$$Q = \int\frac{d\,x}{1-x^4} - \int\frac{x\,d\,x}{1-x^4}\,,$$

ita vt ob

$$\int\frac{d\,x}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+x}{1-x} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x\,, \text{ habeamus}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x - \tfrac{1}{4}\,l\,(1+x\,x)$$

ſiue pro terminis integrationis praeſcriptis

$$Q = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{4}\,l\,2\,,$$

vnde colligendo nanciſcimur

$$S = P + Q = \tfrac{\pi}{4}\,,$$

hoc

hoc eſt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \left[\begin{matrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{matrix} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

quae expreſſio complectitur proprietatem illam Elaſticae rectangulae, ſiue Lintcariae, ab Ill. *Eulero* detectam: quod rectangulum, ſub applicata huius curuae, abſciſſae $= 1$ reſpondente, eiusque arcu comprehenſum, aequetur areae circuli, cuius diameter $= 1$.

Methodus altera.

§. 19. Fundamentum huius methodi in eo eſt poſitum, quod iſta formula integralis: $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$, ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſa, duplici modo in productum infinitum conuerti queat, ope Methodi nuperrime ab Illuſtri *Eulero* traditae, ex qua, ipſo ſuadente, modum deſumſi, valorem producti in titulo expoſiti explorandi, qui eo maiorem attentionem meretur, quod applicationes caſuum particularium ſine vlla vlteriori integratione expediri et facili negotio ex formulis generalibus deduci queant.

§. 20. *Prior modus* conuerſionis formulae

$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$ in productum infinitum hic eſt:

Ponatur $\Sigma = x^m (1-x^n)^{\frac{k}{n}}$,

quae formula pro vtroque termino integrationis, hoc eſt tam caſu $x = 0$, quam caſu $x = 1$, euaneſcit, dummodo fuerint m, n et k numeri poſitiui. Hinc differentiando erit:

$$d\Sigma = x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}\,(m - mx^n - kx^n).$$

 Po-

Poſito igitur

$$dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = dV,$$

ita vt ſit

$$V = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}},$$

erit iterum integrando

$$\Sigma = m\int x^{m-1}\,dV - (m+k)\int x^{m+n-1}\,dV.$$

§. 21. Cum autem forma pro Σ aſſumta pro ambobus integrationis terminis in nihilum abeat, fieri debet $\Sigma = 0$, vnde naſcitur haec aequatio:

$$m\int x^{m-1}\,dV - (m+k)\int x^{m+n-1}\,dV = 0,$$

ideoque, integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſis, erit

$$\int x^{m-1}\,dV = \frac{m+k}{m}\int x^{m+n-1}\,dV.$$

Simili modo fiet

$$\int x^{m+n-1}\,dV = \frac{m+k+n}{m+n}\int x^{m+2n-1}\,dV;$$

$$\int x^{m+2n-1}\,dV = \frac{m+k+2n}{m+2n}\int x^{m+3n-1}\,dV;$$

$$\int x^{m+3n-1}\,dV = \frac{m+k+3n}{m+3n}\int x^{m+4n-1}\,dV;$$

et ita porro. Quod ſi igitur loco integralium, in parte dextra occurrentium, ſucceſſiue ſubſtituantur valores aſſignati, haecque operatio in infinitum vsque continuata concipiatur, habebitur:

$$\int x^{m-1}\,dV = \frac{m+k}{m}\cdot\frac{m+k+n}{m+n}\cdot\frac{m+k+2n}{m+2n}\ldots\int x^{m+in-1}\,dV$$

denotante i numerum infinitum.

§. 22. Ponatur breuitatis gratia $\int x^{m-1}\,dV = \Phi$, vt ſit

$\Phi =$

$$\Phi = \frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdot \frac{m+k+3n}{m+3n} \ldots \int x^{m+in-1}\, d\mathrm{V},$$

et pro eliminanda formula integrali infinita $\int x^{m+in-1}\, d\mathrm{V}$ ſumatur $m = n$, ſtatuaturque

$$\Phi' = \int \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}},$$

quae formula per ſimile productum infinitum exprimi, ſimulque integrari poteſt. Ponatur enim

$1 - x^n = z^n$, vt ſit $x^{n-1}\, dx = -z^{n-1}\, dz$ et
$\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}} = z^{n-k}$, fietque

$$\Phi' = -\int z^{k-1}\, dz = \mathrm{C} - \frac{z^k}{k} = \mathrm{C} - \frac{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k},$$

vbi, poſito $x = 0$, conſtans ita definitur, vt ſit $\mathrm{C} = \frac{1}{k}$, vnde colligitur

$$\Phi' = \frac{1-(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k},$$

hincque poſito $x = 1$ erit

$$\Phi' = \frac{1}{k} = \frac{n+k}{n} \cdot \frac{2n+k}{2n} \cdot \frac{3n+k}{3n} \cdot \frac{4n+k}{4n} \ldots \int x^{n+in-1}\, d\mathrm{V}.$$

§. 23. Quod ſi iam prior productum Φ per iſtud Φ' diuidatur, ſinguli factores vnius per reſpondentes alterius, factor infiniteſimus

$$\frac{\int x^{m+in-1}\, d\mathrm{V}}{\int x^{n+in-1}\, d\mathrm{V}}$$

vnitati aequabitur, quo obſeruato orietur iſta expreſſio:

$$\frac{\Phi}{\Phi'} = k\Phi = \frac{n(m+k)}{m(n+k)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(2n+k)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(3n+k)} \cdot \text{etc.}$$

Hic ergo modus ſuppeditauit:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n(m+k)}{m(n+k)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(2n+k)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(3n+k)} \cdot \text{etc.}$$

§. 24. *Modus alter*, eandem formulam in huiusmodi productum infinitum conuertendi, ita ſe habet: In expreſſione, §. 21. pro formula

$$\int x^{m-1}\,dV = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$$

inuenta, ponatur $m = n - k$, vt habeatur iſta:

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{n}{n-k} \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \frac{3n}{3n-k} \cdot \cdot \cdot \int x^{n-k+in-1}\,dV$$

vbi iam formulam integralem $\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$ per praecepta cognita haud difficulter ad rationalitatem perducere et integrare licet.

§. 25. Quo autem hoc facillime fieri queat, repraeſentetur formula illa ſub hac forma:

$$\int \frac{dx}{x} \times \frac{x^{n-k}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}},$$ et poſito $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = y$ erit

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \int \frac{dx}{x} \cdot y^{n-k}.$$

Eſt

Eſt autem

$$\frac{x^n}{1-x^n} = y^n, \text{ ideoque } x^n = \frac{y^n}{1+y^n},$$

vnde, ſumtis logarithmis erit

$$n\,l\,x = n\,l\,y - l(1+y^n),$$

hincque differentiando

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - \frac{y^{n-1}\,dy}{1+y^n} = \frac{dy}{y(1+y^n)}.$$

Hoc valore ſubſtituto formula integralis propoſita transmutatur in hanc rationalem: $\int \frac{y^{n-k-1}\,dy}{1+y^n}$, quae autem, ob terminos integrationis $x = 0$ et $x = 1$, ab $y = 0$ vsque ad $y = \infty$ eſt extendenda, ita vt nunc habeamus

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} \left[\begin{matrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{matrix}\right] = \int \frac{y^{n-k-1}\,dy}{1+y^n} \left[\begin{matrix}\text{ab } y = 0\\ \text{ad } y = \infty\end{matrix}\right].$$

§. 26. Integrationi actuali ſatis obſtruſae hic immorari ſuperfluum foret, cum Ill. *Eulerus* iam dudum in Calculi Integralis Tom. I. pag. 252. demonſtrauerit eſſe

$$\int \frac{y^{\mu-1}\,dy}{1+y^n} \left(\begin{matrix}\text{ab } y = 0\\ \text{ad } y = \infty\end{matrix}\right) = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{n}}.$$

Hoc enim notato integrale quaeſitum formulae propoſitae erit

$$\frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{(n-k)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \text{ ſin.}(180^\circ - \frac{k\pi}{n})} = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{k\pi}{n}}.$$

Per

Per productum infinitum igitur erit:

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{n-k}\cdot\frac{2n}{2n-k}\cdot\frac{3n}{3n-k}\cdots\int x^{n-k+in-1}dV.$$

§. 27. Si igitur ſuperius productum, §. 21. inventum,

$$\Phi = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{m+k}{m}\cdot\frac{m+k+n}{m+n}\cdot\frac{m+k+2n}{m+2n}\cdots\int x^{m+in-1}dV$$

per poſterius diuidatur, ob poſtremum factorem integralem

$$\frac{\int x^{m+in-1}\,dV}{\int x^{n-k+in-1}\,dV} = 1,$$

habebimus hanc expreſſionem:

$$\frac{n\,\text{ſin.}\,\frac{k\pi}{n}}{\pi}\cdot\Phi = \frac{(m+k)(n-k)}{mn}\cdot\frac{(m+k+n)(2n-k)}{2n(m+n)}\cdot\frac{(m+k+2n)(3n-k)}{3n(m+2n)}\cdot\text{etc.}$$

§. 28. Duplex igitur nacti ſumus productum infinitum pro formula integrali

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} \begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix},$$

cum ſit

$$\text{I.} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{n(m+k)}{m(n+k)}\cdot\frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(2n+k)}\cdot\frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(3n+k)}\cdot\text{etc.}$$

$$\text{II.} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{(m+k)(n-k)}{nm}\cdot\frac{(m+k+n)(2n-k)}{2n(m+n)}\cdot\frac{(m+k+2n)(3n-k)}{3n(m+n)}\cdot\text{etc.}$$

Ope

Ope igitur harum duarum expreſſionum facile erit infinitorum huiusmodi productorum:

$$\int \frac{x^{a-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}},$$

valores aſſignare, id quod exemplis, iam ante prioris methodi ſubſidio expeditis, oſtendiſſe operae pretium erit.

Exemplum I.

§. 29. Sit $\Phi = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, ita vt ſit $m = 1$, $n = 3$, et $k = 1$, et binae expreſſiones pro hac forma integrali erunt:

$$1^\circ).\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3.2}{1.4} \cdot \frac{6.5}{4.7} \cdot \frac{9.8}{7.10} \cdot \frac{12.11}{10.13} \cdot \text{ etc.}$$

$$2^\circ).\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{11.11}{10.12} \cdot \text{ etc.}$$

Tum vero ſumatur $\Phi = \int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$, et ob $m = 2, n = 3$ et $k = 2$ erit duplici modo:

$$\text{I. } \int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3.4}{2.5} \cdot \frac{6.7}{5.8} \cdot \frac{9.10}{8.11} \cdot \frac{12.13}{11.14} \cdot \text{ etc.}$$

$$\text{II. } \int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdot \frac{10.13}{11.12} \cdot \text{ etc.}$$

Harum expreſſionum ſumatur I. et II. eritque productum

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left(\begin{array}{l}\text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1\end{array}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

vt ſupra.

Exemplum II.

§. 30. Sumatur $\Phi = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$, vbi $n = 4$, $m = 1$ et $k = 2$, quibus ſubſtitutis geminus valor formulae integralis Φ erit

$$1^{\circ}).\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3.4}{1.6} \cdot \frac{7.8}{5.10} \cdot \frac{11.12}{9.14} \cdot \text{etc.}$$

$$2^{\circ}).\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2.3}{1.4} \cdot \frac{6.7}{5.8} \cdot \frac{10.11}{9.12} \cdot \text{etc.}$$

Statuatur porro $\Phi = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$, eritque $n = 4$, $m = 3$, $k = 2$, ideoque duplici modo

$$\text{I.}\ \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4.5}{3.6} \cdot \frac{8.9}{7.10} \cdot \frac{12.13}{11.14} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{II.}\ \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{10.13}{11.14} \cdot \text{etc.}$$

Hinc

Hinc ſumto producto ex prima prioris et ſecunda poſterioris formae, colligitur:

$$\text{I}^a \times \text{II}^a = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \text{etc.}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \text{etc.}}$$, hoc eſt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4},$$

Exemplum III.

§. 31. Sit $\Phi = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}}$, quae poſtrema forma applicationi magis conuenit, et cum hoc caſu ſumi debeat $m = 1$, $n = 6$ et $k = 3$, fiet per producta §. 28 exhibita:

$$1^\circ) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6.4}{1.9} \cdot \frac{12.10}{7.15} \cdot \frac{18.16}{13.21} \cdot \frac{24.22}{19.27} \cdot \text{etc.}$$

$$2^\circ) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{4.3}{1.6} \cdot \frac{10.\ 9}{7.12} \cdot \frac{16.15}{13.18} \cdot \frac{22.21}{19.24} \cdot \text{etc.}$$

Sit porro $\Phi = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}}$, atque ob $m = 4$, $n = 6$ et $k = 3$ erit

$$\text{I.} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6.7}{4.9} \cdot \frac{12.13}{10.15} \cdot \frac{18.19}{16.21} \cdot \frac{24.25}{22.27} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{II. } \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 4} \cdot \frac{13 \cdot 9}{12 \cdot 10} \cdot \frac{19 \cdot 15}{18 \cdot 16} \cdot \frac{25 \cdot 21}{24 \cdot 22} \text{ etc.}$$

Multiplicando iam, ſiue 1 per II, ſiue 2 per I, fiet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \times \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6}.$$

vti iam aliunde conſtat.

§. 32. Infiniti adhuc alii caſus particulares afferri poſſent, quibus omnibus productum infinitum, valorem producti integralis exhibens, abrumpitur: generaliori autem modo haec abruptio efficitur, ſumendo primo

$$m = \mu + 1;\; n = 2\nu \text{ et } k = \nu,$$

vt habeatur:

$$1.\ \int \frac{x^\mu\,dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2\nu(\mu+\nu+1)}{3\nu(\mu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+3\nu+1)}{5\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+5\nu+1)}{7\nu(\mu+4\nu+1)} \text{. etc.}$$

$$2.\ \int \frac{x^\mu\,dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu(\mu+\nu+1)}{2\nu(\mu+1)} \cdot \frac{3\nu(\mu+3\nu+1)}{4\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+5\nu+1)}{6\nu(\mu+4\nu+1)} \text{. etc.}$$

tum vero ſumendo $m = \mu + \nu + 1$, manente $n = 2\nu$ et $k = \nu$, quo caſu obtinentur hae duae expreſſiones:

$$\text{I. } \int \frac{x^{\mu+\nu}\,dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2\nu(\mu+2\nu+1)}{3\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+4\nu+1)}{5\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+6\nu+1)}{7\nu(\mu+5\nu+1)} \text{.etc.}$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{\mu+\nu}\,dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu(\mu+2\nu+1)}{2\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{3\nu(\mu+4\nu+1)}{4\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+6\nu+1)}{6\nu(\mu+5\nu+1)} \text{.etc.}$$

§. 33.

§. 33. Quo abruptio producti harum binarum formularum integralium, quae fieri debet, ſiue I per II ſiue 2 per I multiplicetur, melius in oculos incidat, factorem denominatoris, $\mu+1$, tanquam a reliquis, prorſus ſimilibus, alienum ſpectare et ſeorſim ponere conueniet. Verbi gratia ſi conſideremus expreſſionem numero 1 deſignatam, eam ſub hac forma repraeſentemus, praecedenti prorſus aequiualentem:

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{2\nu(\mu+\nu+1)}{\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+3\nu+1)}{3\nu(\mu+4\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+5\nu+1)}{5\nu(\mu+6\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

quam ſi igitur ducamus in iſtam:

$$\int \frac{x^{\mu+\nu} dx}{\sqrt[2\nu]{(1+x^{2\nu})^\nu}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu(\mu+2\nu+1)}{2\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{3\nu(\mu+4\nu+1)}{4\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+6\nu+1)}{6\nu(\mu+5\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

prodibit ſequens productum ſatis memorabile:

$$\int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \times \int \frac{x^{\mu+\nu} dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \begin{pmatrix} \text{ab } x=0 \\ \text{ad } x=1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2\nu(\mu+1)}.$$

§. 34. Idem, vti iam innuimus, productum naſcitur, ſumendo 2 et I. Cum enim ſit

$$2. \int \frac{x^\mu dx}{\sqrt{1-x^{2\nu}}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu}{\mu+1} \cdot \frac{3\nu(\mu+\nu+1)}{2\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+3\nu+1)}{4\nu(\mu+4\nu+1)} \cdot \frac{7\nu(\mu+5\nu+1)}{6\nu(\mu+6\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{I.} \int \frac{x^{\mu+\nu} dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2\nu(\mu+2\nu+1)}{3\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+4\nu+1)}{5\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+6\nu+1)}{7\nu(\mu+5\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

 vtique

vtique erit

$$\int \frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \times \int \frac{x^{\mu+\nu}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \begin{pmatrix}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{pmatrix} = \frac{\pi}{2\nu(\mu+1)}.$$

qui valor, ex formulis generalioribus noſtris deductus, prorſus congruit cum illo, quem Ill. *Eulerus*, in Inſtitutionibus calculi integralis, Tom. I. pag. 232, per longe aliam methodum inuenerat.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

DE MOTV OSCILLATORIO DVORVM CORPORVM EX FILO SVPER TROCHLEAS TRADVCTO SVSPENSORVM.

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Filo A M N B, ſuper duas trochleas M et N traducto, appenſa ſint duo corpora A et B. Per puncta M et N ducantur rectae verticales M P et N Q, ad easque horizontales A P et B Q, et elapſo tempore t corpora teneant ſitum in figura repraeſentatum. Tum pro ſitu corporum ponantur coordinatae $MP = x$ et $PA = y$, $NQ = x'$ et $QB = y'$, et quia longitudo fili manet inuariata, ſtatuamus $MN = M$, $MA = a + z$ et $NB = b - z$, vt tota fili longitudo ſit $= a + b + M$; tum vero ponamus angulos $AMP = \eta$ et $BNQ = \theta$ eritque Tab. III. Fig. 1.

$$x = (a + z) \text{ coſ. } \eta = \text{ et } y = (a + z) \text{ ſin. } \eta;$$

eodemque modo

$$x' = (b - z) \text{ coſ. } \theta \text{ et } y' = (b - z) \text{ ſin. } \theta.$$

§. 2. Ponatur nunc tenſio fili $= T$, a qua quia ambo corpora ſurſum trahuntur, dum propria grauitate

deorſum nituntur, principia motus nobis ſuppeditant quatuor ſequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{A - T\,\text{coſ.}\,\eta}{A}; \quad \text{III. } \frac{ddx'}{2g\,dt^2} = \frac{B - T\,\text{ſin.}\,\theta}{B}$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\frac{T\,\text{ſin.}\,\eta}{A}; \quad \text{IV. } \frac{ddy'}{2g\,dt^2} = -\frac{T\,\text{ſin.}\,\theta}{B},$$

ex quibus quatuor aequationibus 1°. tenſionem fili T: 2° quantitatem z; 3° et 4° angulos η et θ definiri oportet.

§. 3. At vero differentiando habebimus

$$dx = dz\,\text{coſ.}\,\eta - (a+z)\,d\eta\,\text{ſin.}\,\eta \text{ et } ddx = (ddz - (a+z)\,d\eta^2)\,\text{coſ.}\,\eta - (2dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta)\,\text{ſin.}\,\eta$$

$$dy = dz\,\text{ſin.}\,\eta + (a+z)\,d\eta\,\text{coſ.}\,\eta \text{ et } ddy = (ddz - (a+z)\,d\eta^2)\,\text{ſin.}\,\eta + (2dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta)\,\text{coſ.}\,\eta$$

Eodem modo reperietur

$$ddx' = -(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\,\text{coſ.}\,\theta + (2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta)\,\text{ſin.}\,\theta$$

$$ddy' = -(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\,\text{ſin.}\,\theta - (2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta)\,\text{coſ.}\,\theta$$

quibus valoribus ſubſtitutis, noſtrae aequationes erunt:

$$\text{I. } \frac{(ddz - (a+z)\,d\eta^2)\,\text{coſ.}\,\eta - (2dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta)\,\text{ſin.}\,\eta}{2g\,dt^2} = \frac{A - T\,\text{coſ.}\,\eta}{A}.$$

$$\text{II. } \frac{(ddz - (a+z)\,d\eta^2)\,\text{ſin.}\,\eta + (2dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta)\,\text{coſ.}\,\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{T\,\text{ſin.}\,\eta}{A}.$$

$$\text{III. } -\frac{(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\,\text{coſ.}\,\theta + (2dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{2g\,dt^2} = \frac{B - T\,\text{coſ.}\,\theta}{B}.$$

$$\text{IV. } -\frac{(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\,\text{ſin.}\,\theta - (2dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta)\,\text{coſ.}\,\theta}{2g\,dt^2} = -\frac{T\,\text{ſin.}\,\theta}{B}.$$

§. 4. Hinc iam per idoneas combinationes formentur aequationes ſequentes ſimpliciores:

I. coſ. η + II. ſin. η dat:

$$\text{I°. } \frac{ddz - (a+z)\,d\eta^2}{2g\,dt^2} = \frac{A\,\text{coſ.}\,\eta - T}{A}; \text{ porro}$$

− I. ſin. η + II. coſ. η dat:

II°.

II°. $\frac{2\,dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta}{2\,g\,dt^2} = -$ ſin. η.

$-$ III. coſ. θ $-$ IV. ſin. θ praebet:

III°. $\frac{ddz + (b-z)\,d\theta^2}{2\,g\,dt^2} = \frac{T - B\,coſ.\,\theta}{B}$.

$+$ III. ſin. θ $-$ IV. coſ. θ producit:

IV°. $\frac{2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta}{2\,g\,dt^2} =$ ſin. θ.

Sicque tantum in I^a et III^a. tenſio T occurrit, ſecunda autem et quarta tenſionis ſunt immunes.

§. 5. Ad tenſionem igitur eliminandam vtamur hac noua combinatione: I^a. A + III°. B, quae praebet

$$\frac{(A+B)\,ddz - A(a+z)\,d\eta^2 + B(b-z)\,d\theta^2}{2\,g\,dt^2} = A\,\text{coſ.}\,\eta - B\,\text{coſ.}\,\theta$$

quae ergo aequatio cum ſuperiorum ſecunda et quarta totam ſolutionem problematis continet, vnde tam quantitatem z quam angulos η et θ definiri oportet.

§. 6. Antequam reſolutionem harum aequationum aggrediamur, quatuor aequationes primum inuentas alio modo tractemus, et quia eſt

$dx = dz\,\text{coſ.}\,\eta - (a+z)\,d\eta\,\text{ſin.}\,\eta$ et $dy = dz\,\text{ſin.}\,\eta + (a+z)\,d\eta\,\text{coſ.}\,\eta$

vtamur ſequentibus combinationibus:

I. $2\,dx$ + II. $2\,dy$, vnde fit

$$\frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy}{2\,g\,dt^2} = 2\,dx - \frac{2\,T\,dz}{A},$$

quae aequatio integrata dat

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2\,g\,dt^2} = 2\,x - 2\int\frac{T\,dz}{A}.$$

Nunc vero haec combinatio: I. x + II. y praebet

$$\frac{x\,ddx + y\,ddy}{2\,g\,dt^2} = x - \frac{T(a+z)}{A}.$$

 Haec

Haec aequatio addatur ad priorem et prodibit

$$\frac{dx^2 + dy^2 + xddx + yddy}{2g\,dt^2} = 3x - 2\int\frac{T\,dz}{A} - \frac{T}{A}(a+z),$$

vbi quidem partis ad ſiniſtram integrale eſt $\frac{x\,dx + y\,dy}{2g\,dt^2}$; at ex membro ad dextram nihil concludi poſſet. Pari modo non ſuccederet haec combinatio: I. y — II. x, quae dat $\frac{y\,ddx - x\,ddy}{2g\,dt^2} = y$, vbi etiam membri ſiniſtri integrale eſt $\frac{y\,dx - x\,dy}{2g\,dt^2}$, ſed iterum membrum alterum nullam reductionem patitur.

§. 7. Mirum autem non eſt, hunc motum, qualem in genere contemplamur, prorſus eſſe inextricabilem, quoniam ambo corpora A et B etiam inaequalia eſſe poſſent: hoc autem caſu grauius inter oſcillandum deſcenderet, leuius vero aſcenderet, ſicque motus prodiret nimis complicatus, quam vt per calculum determinari poſſet. Quamobrem neceſſe eſt noſtram inueſtigationem tantum ad corpora aequalia reſtringere, quia alioquin ſtatus aequilibrii locum habere non poſſet. Praeterea vero etiam neceſſe eſt diuagationes, ſeu angulos η et θ quam minimos aſſumere; vnde facile intelligitur, tenſionem fili hoc caſu ponderi cuiusque corporis fore aequalem, ita vt ſit $T = A = B$. Denique patet, niſi corporibus initio motus verticalis fuerit impreſſus, ambo corpora durante motu vix eſſe vel aſcenſura vel deſcenſura, ſicque etiam quantitas z quaſi vt infinite parua tractari poterit.

§. 8. Ponamus igitur ambo corpora A et B inter ſe aequalia, ac primo quidem remoueamus vtrumque motum oſcillatorium, ita vt ſit $\eta = 0$ et $\theta = 0$, ac remanebunt

bunt tantum aequationes prima et tertia

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{T}{A};$$
$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{T}{A} - 1;$$

quae inuicem additae dant $\frac{2ddz}{2g\,dt^2} = 0$, et a ſe inuicem ſubtractae relinquunt $0 = -\frac{2T}{A} + 2$. Ex priore ergo ſequitur $\frac{dz}{dt} = \alpha$, ideoque $z = \alpha t$; vnde patet, corpus A motu vniformi deſcendere celeritate $= \alpha$, alterum vero corpus B eadem celeritate aſcendere. Ex poſteriore vero fit $T = A$; tenſio ſcilicet fili perpetuo erit eadem et aequalis ponderi vnius corporis.

§. 9. Nunc igitur tribuamus vtrique corpori quandam inclinationem η et θ, quaſi infinite exiguam, et manifeſtum eſt, priorem motum inde non ſenſibiliter turbari, ita vt adhuc ſit $z = \alpha t$ et $T = A$, niſi quatenus ob motum minimum corporum tenſio aliquantillum immutetur; vnde literam B in calculo retineamus. Quatuor ergo aequationes noſtrae erunt:

$$\text{I}\ -\frac{(a+\alpha t)\,d\eta^2}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{T}{A};\quad \text{II}\ \frac{2\alpha\,dt\,d\eta + (a+\alpha t)\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta$$
$$\text{III}\ \frac{(b-\alpha t)\,d\theta^2}{2g\,dt^2} = \frac{T}{A} - 1;\quad \text{IV}\ \frac{2\alpha\,dt\,d\theta - (b-\alpha t)\,dd\theta}{2g\,dt^2} = \theta,$$

vbi ex ſecunda et quarta elici opportet ambos angulos η et θ. Prima vero ac tertia, quia inuoluunt quaſi infinite-parua ſecundi ordinis, tantum inſeruient correctionibus minimis, tam tenſionis T quam quantitatis z, accuratius determinandis, quas igitur hic praetermittere licebit.

§. 10. Pro angulo igitur η inueniendo habemus hanc aequationem:

$$2\alpha\, dt\, d\eta + (a + \alpha t)\, dd\eta + 2 g \eta\, dt^2 = 0,$$

quam quidem facile eſſet ad differentialia primi gradus reducere, quod autem nobis parum lucri eſſet allaturum. Ad ipſam aequationem autem commodius referendam ponamus $a = i\alpha$ et $\frac{2g}{\alpha} = n$, vt habeamus hanc aequationem:

$$2\, dt\, d\eta + (i + t)\, dd\eta + n \eta\, dt^2 = 0,$$

pro cuius integrali inueniendo fingamus hanc ſeriem:

$$\eta = A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{d\eta}{dt} = B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + \text{etc. et}$$

$$\frac{dd\eta}{dt^2} = 1.2C + 2.3Dt + 3.4Ett + 4.5Ft^3 \text{ etc.}$$

qui valores ſubſtituantur vt ſequitur:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\frac{i.\, dd\eta}{dt^2} & = 1.2iC & + 2.3iDt & + 3.4iEtt & + 4.5iFt^3 & + \text{etc.} \\
\frac{t.\, dd\eta}{dt^2} & = & + 1.2C & + 2.3D & + 3.4E & + \text{etc.} \\
\frac{2\, d\eta}{dt} & = 2B & + 4C & + 6D & + 8E & + \text{etc.} \\
n\eta & = nA & + nB & + nC & + nD & + \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0$$

vnde deducuntur hae determinationes:

$$C = \frac{-2B - nA}{1.2i};\quad D = \frac{-6C - nB}{2.3i};\quad E = \frac{-12D - nC}{3.4i};\ \text{etc.}$$

§. 11. Quia autem hic ſinguli coefficientes a binis praecedentibus pendent, huic incommodo medelam afferemus, ponendo $i + t = s$, vt habeamus hanc aequationem:

$$2\, ds\, d\eta + s\, dd\eta + n\eta\, ds^2 = 0, \text{ et nunc ponamus}$$

$$\eta = A + Bs + Css + Ds^3 + \text{etc.}$$

qua

qua ſerie ſubſtituta fiet

$$\left.\begin{array}{l} \frac{s\,dd\eta}{ds^2} = 1.2\,C\,s + 2.3\,D\,ss + 3.4\,E\,s^3 + 4.5\,F\,s^4 + \text{etc.} \\ \frac{2\,d\eta}{ds} = 2B + 4Cs + 6Dss + 8Es^3 + 10Fs^4 + \text{etc.} \\ n\eta = nA + nBs + nCss + nDs^3 + nEs^4 + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Hinc fit

$$B = \frac{-nA}{2};\ C = \frac{-nB}{6};\ D = \frac{-nC}{12};\ E = \frac{-nD}{20};\ \text{etc.}$$

vnde ſeries aſſumta ita prodit expreſſa:

$$\frac{\eta}{A} = 1 - \frac{ns}{2} + \frac{nnss}{2.6} - \frac{n^3 s^3}{2.6.12} + \frac{n^4 s^4}{2.6.12.20} - \text{etc.}$$

quae, quia nullo caſu abrumpitur, nihil prodeſt, niſi forte quamdiu tempus, ideoque et s, eſt quantitas valde parua.

§. 12. Notatu etiam digna eſt transformatio iſtius aequationis, ſtatuendo $\eta = \frac{y}{s}$; hinc enim erit

$$d\eta = \frac{dy}{s} - \frac{y\,ds}{ss} \text{ et } dd\eta = \frac{ddy}{s} - \frac{2\,dy\,ds}{ss} + \frac{2\,y\,ds^2}{s^3};$$

qui valores ſubſtituti producent hanc aequationem:

$$ddy + \frac{n\,y\,ds^2}{s} = 0.$$

Quod ſi hic ponamus

$y = e^{\int u\,ds}$, vt ſit $dy = u\,ds\,e^{\int u\,ds}$ et $ddy = (du\,ds + u^2 ds^2)\,e^{\int u\,ds}$, fietque $du + uu\,ds + \frac{n\,ds}{s} = 0$, quae aequatio quia eſt formae Riccatianae, quam nullo adhuc modo tractare licuit, omnis opera in ea euoluenda fruſtra conſumetur; ita vt determinationem huius motus oſcillatorii, quo corpora A et B ciebuntur, dum filum ſuper trochleas vniformiter promouetur, pro caſu deſperato declarare ſimus coacti.

§. 13.

§. 13. Interim tamen, quia longitudo fili MA continuo creſcit, ita vt pendulum, corpus A ſuſtinens, continuo creſcat, evidens eſt, oſcillationes continuo tardiores fieri debere; vnde ſi pro tempore praeſente quantitas s tanquam conſtans ſpectaretur, omiſſo primo termino, vt haberemus:

$$d\,d\,y + \frac{n\,y\,d\,s^2}{s} = 0, \text{ integrale foret}$$

$$y = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(\lambda + s\sqrt{\tfrac{n}{s}}) \text{ ſiue}$$

$$\eta\,s = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s}) \text{ ſiue}$$

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}\,\alpha}{a + \alpha\,t}\,\text{ſin.}\,(\lambda + \frac{\sqrt{2g(a + \alpha\,t)}}{\alpha});$$

quae expreſſio non multum videtur a ſcopo aberrare.

§. 14. Vt autem appareat, quantum ille valor

$$y = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(\lambda + s\sqrt{\tfrac{n}{s}}) = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s})$$

a veritate diſcrepet, eum in aequatione differentiali $s\,d\,d\,y + n\,y\,d\,s^2 = 0$ ſubſtituamus. Quia ergo eſt

$$\frac{d\,y}{d\,s} = \frac{\mathfrak{A}\sqrt{n}}{2\sqrt{s}}\,\text{coſ.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s}) \text{ et}$$

$$\frac{d\,d\,y}{d\,s^2} = -\frac{n\,\mathfrak{A}}{4\,s}\,\text{ſin.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s}) - \frac{n\,\mathfrak{A}}{4\,s\sqrt{n\,s}}\,\text{coſ.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s})$$

habebimus hanc aequationem:

$$-\frac{n\,\mathfrak{A}}{4}\,\text{ſin.}\,(\lambda+\sqrt{n\,s}) - \frac{n\,\mathfrak{A}}{4\sqrt{n\,s}}\,\text{coſ.}\,(\lambda+\sqrt{n\,s}) + n\,\mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,(\lambda+\sqrt{n\,s}) = 0$$

ſiue

$$\frac{3\,n\,\mathfrak{A}}{4}\,\text{ſin.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s}) - \frac{\mathfrak{A}\sqrt{n}}{4\sqrt{s}}\,\text{coſ.}\,(\lambda + \sqrt{n\,s}) = 0$$

vnde aberratio diiudicari debet.

§. 15. Quanquam igitur caſus, quo B = A, facillimus videbatur, tamen ſtatim ac filum promouetur nihil plane

plane de motu corporum definire licet; quando autem filum quieſcit, ita vt ſit $\alpha = 0$, tum vtrumque corpus perinde oſcillationes ſuas peraget, ac ſi firmiter eſſet ſuſpenſum. Tanto igitur minus erit ſperandum, ſi corpora inter ſe inaequalia ſtatuere velimus. Interim tamen occurrent certi quidam caſus, quibus praeter omnem expectationem motum definire licebit, quos ergo vtique operae pretium erit accuratius euoluiſſe.

§. 16. Primum igitur iterum faciamus $\eta = 0$ et $\theta = 0$, et aequationes noſtrae erunt:

I. $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{T}{A}$.

III. $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{T}{B} - 1$; vnde fit $T = \frac{2AB}{A+B}$, hincque

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{A-B}{A+B} = \frac{1}{n}, \text{ vt ſit } n = \frac{A+B}{A-B}.$$

Hinc iam erit

$$\frac{dz}{2g\,dt} = \frac{t}{n}, \text{ ideoque } dz = \frac{2gt\,dt}{n} \text{ et } z = \frac{gtt}{n},$$

vbi conſtantes non addimus, quia hinc multo magis quam ſupra in aequationes inextricabiles illaberemus; ſic igitur aſſecuti ſumus has duas aequationes: $T = \frac{2AB}{A+B}$ et $z = \frac{gtt}{n}$, exiſtente $n = \frac{A+B}{A-B}$, ita vt n ſit numerus poſitiuus, ſi $A > B$, contra vero negatiuus.

§. 17. Nunc etiam vtrique corpori minimas tribuamus inclinationes, a quibus cum praecedentes valores non immutari ſint cenſendi, tantum ſecunda et quarta aequationum noſtrarum in computum erunt ducendae, quae ob $dz = \frac{2gt\,dt}{n}$ erunt:

$$\frac{4gt\,dt\,d\eta + (an + gtt)\,dd\eta}{2gn\,dt^2} = -\eta \text{ et}$$

$$\frac{4gt\,dt\,d\theta - (bn - gtt)\,dd\theta}{2gn\,dt^2} = +\theta,$$

quae cum inter ſe ſint ſimiles, tractaſſe ſolam primam ſufficiet, quae quo commodior reddatur, faciamus $na = ig$, vt ſit $i = \frac{na}{g}$, et aequatio reſoluenda erit:

$$4\,t\,dt\,d\eta + (i + tt)\,dd\eta + 2\,n\,\eta\,dt^2 = 0$$

quam etiam vt ſupra per ſeries integrare tentemus.

§. 18. Fingamus igitur ſequentem ſeriem:

$$\eta = A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + \text{ etc. erit}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + 6Gt^5 + \text{ etc. et}$$

$$\frac{dd\eta}{dt^2} = 1.2\,C + 2.3\,Dt + 3.4\,Ett + 4.5\,Ft^3 + 5.6\,Gt^4 + \text{etc.}$$

quibus ſubſtitutis fiet

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\frac{i\,dd\eta}{dt^2} = 1.2\,iC & + 2.3\,iDt & + 3.4\,iEtt & + 4.5\,iFt^3 & + 5.6\,iGt^4 & + \text{etc.} \\
\frac{tt\,dd\eta}{dt^2} = & & + 1.2\,C & + 2.3\,D & + 3.4\,E & + \text{etc.} \\
\frac{4t\,d\eta}{dt} = & 4B & + 8C & + 12D & + 16E & + \text{etc.} \\
2n\eta = 2An + & 2Bn & + 2Cn & + 2Dn & + 2En & + \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0$$

vnde ſequuntur ſequentes denominationes:

$$C = -\frac{2An}{1.2\,i};\; D = -\frac{B(2n+4)}{2.3\,i};\; E = -\frac{C(2n+10)}{3.4\,i};$$

$$F = -\frac{D(2n+18)}{4.5\,i};\; G = -\frac{E(2n+28)}{5.6\,i};\; H = -\frac{F(2n+40)}{5.6\,i} \text{ etc.}$$

ſicque bini primi coefficientes A et B manent indeterminati.

§. 19. Hinc igitur perſpicitur, hanc ſeriem abrumpi ſequentibus caſibus: ſcil. $n = 0$; $n = -2$; $n = -5$; $n = -9$; $n = -14$; $n = -20$, hincque in genere ſi $n = -\frac{i(i+3)}{2}$; vbi quidem alternatim vel A vel B nihilo aequale ſumi debet, ita vt his caſibus motum deſideratum aſſignare valeamus. Praecipuos igitur euoluamus:

I. Si

I. Si $n = -2$ erit $\eta = Bt$

II. Si $n = -5$ erit $\eta = A + \frac{10\,Att}{1.\,2\,i}$;

III. Si $n = -9$ erit $\eta = Bt + \frac{14\,Bt^3}{2.\,3\,i}$;

IV. Si $n = -14$ erit $\eta = A + \frac{28\,Att}{1.\,2\,i} + \frac{28.\,18\,A}{1.\,2.\,3.\,4\,ii}$;

V. Si $n = -20$ erit $\eta = Bt + \frac{36\,Bt^3}{2.\,3\,i} + \frac{36.\,\,2\,Bt^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\,ii}$;

VI. Si $n = -27$ erit $\eta = A + \frac{54\,Att}{1.\,2\,i} + \frac{54.\,44\,At^4}{1.\,2.\,3.\,4\,ii} + \frac{54.\,44.\,26\,At^6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6\,i^3}$;

etc. etc. etc. etc.

§. 20. Euoluamus igitur caſum $n = -2$, vnde pro noſtris corporibus prodit $B = 3A$, ita vt corpus A ſit aſcenſurum; tum igitur erit $\eta = Bt$, quod autem eſt integrale particulare, vnde ante omnia integrale completum inueſtigari debet. Hunc in finem ponamus $\eta = tv$, ita vt ſit $d\eta = tdv + vdt$ et $dd\eta = tddv + 2dtdv$, et prodibit

$$4ttdtdv + (i+tt)tddv + 2(i+tt)dtdv = 0, \text{ ſiue}$$

$$(i+tt)tddv + 2(i+3tt)dtdv = 0, \text{ vnde fit}$$

$$ddv = -\frac{2(i+3tt)dtdv}{t(i+tt)}, \text{ hinc}$$

$$\frac{ddv}{dv} = -\frac{2(i+3tt)dt}{t(i+tt)} = -\frac{2dt}{t} - \frac{4tdt}{i+tt},$$

vnde fit integrando

$$l\frac{dv}{dt} = -2lt - 2l(i+tt) + lC, \text{ conſequenter}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{tt(i+tt)^2}, \text{ ideoque } dv = \frac{Cdt}{tt(i+tt)^2},$$

quae ita reſoluitur:

$$dv = \frac{Cdt}{iitt} - \frac{Cdt}{i(i+tt)^2} - \frac{Cdt}{ii(i+tt)}, \text{ vnde fit}$$

$$v = -\frac{C}{iit} - \frac{C}{i}\int\frac{dt}{(i+tt)^2} - \frac{C}{ii}\int\frac{dt}{i+tt}.$$

§. 21. Erat autem $i = \frac{n\,a}{g} = -\frac{2\,a}{g}$, ideoque i numerus negatiuus. Ponamus igitur $i = -c\,c$ et habebimus

$$v = -\frac{C}{c^4\,t} + \frac{C}{c\,c}\int\frac{d\,t}{(t\,t-c\,c)^2} - \frac{C}{c^4}\int\frac{d\,t}{t\,t-c\,c}.$$

Ponamus porro $\int\frac{d\,t}{(t\,t-c\,c)^2} = \frac{\alpha\,t}{t\,t-c\,c} + \int\frac{\beta\,d\,t}{t\,t-c\,c}$, eritque differentiando et per $d\,t$ diuidendo

$$\frac{1}{(t\,t-c\,c)^2} = \frac{\alpha}{t\,t-c\,c} - \frac{2\,\alpha\,t\,t}{(t\,t-c\,c)^2} + \frac{\beta}{t\,t-c\,c},$$

vnde colligimus $\alpha = \beta = -\frac{1}{2\,c\,c}$, ita vt nunc ſit

$$v = -\frac{C}{c^4\,t} - \frac{C\,t}{2\,c^4(t\,t-c\,c)} - \frac{3\,C}{2\,c^4}\int\frac{d\,t}{t\,t-c\,c}.$$

Eſt vero

$$\int\frac{d\,t}{t\,t-c\,c} = -\int\frac{d\,t}{c\,c-t\,t} = -\frac{1}{2\,c}\,l\,\frac{c+t}{c-t}$$

conſequenter

$$v = -\frac{C}{c^4\,t} - \frac{C\,t}{2\,c^4(c\,c-t\,t)} + \frac{3\,C}{4\,c^5}\,l\,\frac{c+t}{c-t},$$

vel, poſito breuitatis gratia $C = -D\,c^5$, fiet

$$v = \frac{D\,c}{t} + \frac{D\,c\,t}{2(c\,c-t\,t)} - \frac{3\,D}{4}\,l\,\frac{c+t}{c-t} + E.$$

§. 23. Inuento hoc valore erit angulus noſter

$$\eta = D\,c + \frac{D\,c\,t\,t}{2(c\,c-t\,t)} - \frac{3}{4}\,D\,t\,l\,\frac{c+t}{c-t} + E\,t,$$

vbi notetur eſſe $c\,c = -i = +\frac{2\,a}{g}$. Poſito igitur $t = 0$ fiet $\eta = D\,c$; ſicque $D\,c$ exprimit inclinationem initialem. Hinc creſcente t hoc pendulum M A aſcendet, et angulus etiam creſcit, niſi forte conſtans D fuerit negatiua; verum tempus t non vltra c augeri poteſt, quia alioquin expreſſio pro η adeo in infinitum excreſceret. Quod quo clarius appareat, conſideremus etiam celeritatem angularem $\frac{d\,\eta}{d\,t} = \frac{D\,c^3\,t}{(c\,c-t\,t)^2} - \frac{3}{4}\,D\,l\,\frac{c+t}{c-t} - \frac{3}{2}\,\frac{D\,c\,t}{c\,c-t\,t} + E$. Nunc igitur ponamus initio, quo $t = 0$, fuiſſe $\eta = \alpha$ et $\frac{d\,\eta}{d\,t} = 0$,

erit-

eritque $\alpha = Dc$ et $E = 0$, ideoque et $D = \frac{\alpha}{c}$, ſicque erit

$$\eta = \alpha + \frac{\alpha tt}{2(cc - tt)} - \frac{3\alpha t}{4c} l \frac{c+t}{c-t} \text{ et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha cct}{(cc-tt)^2} - \frac{3\alpha}{4c} l \frac{c+t}{c-t} - \frac{3\alpha t}{2(cc-tt)}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha t(3tt - cc)}{2(cc-tt)^2} - \frac{3\alpha}{4c} l \frac{c+t}{c-t},$$

ſicque hinc ad quoduis tempus t tam angulum η quam celeritatem angularem $\frac{d\eta}{dt}$ definire licet.

§. 24. Ex indole harum formularum perſpicuum eſt, tempus t non vltra terminum C augeri poſſe, quippe quo tempore longitudo fili $MA = a + z$ ad nihilum redigitur, et tam angulus η, quam celeritas $\frac{d\eta}{dt}$ in infinitum excreſcunt, quod quidem cum pendulo infinite breui facile conciliari poteſt. Verum iam multo ante, quam hoc euenit, angulus η tam fit magnus, vt non amplius pro tam paruo haberi poſſit, qualem natura noſtri calculi ſupponit; ſicque etiam iſtius motus determinatio mox erronea euadet. Quod autem ad oſcillationes alterius corporis maioris B attinet, earum motus ob defectum Analyſeos nullo plane caſu definire licet, quoniam omnes valores numeri n, quibus integratio ſuccedit, ſunt negatiui, ideoque tantum in pendulo aſcendente locum habere poſſunt.

DE PROBLEMATE QVODAM MECHANICO, SATIS OBVIO, AT SOLVTV DIFFICILLIMO.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Conſideranti mihi hunc verſum Virgilii ſaepius occurrentem:

Anchora de prora iacitur, ſtant littore puppes.

obtulit ſe iſta quaeſtio: quomodo nauis, poſtquam anchora de prora fuerit iacta, motum ſuum ſit proſecutura; vbi quidem euidens eſt, proram alium motum recipere non poſſe, praeter circularem circa anchoram. At vero tota nauis interea circa proram motu quodam rotatorio feretur, quem autem tam ob ipſam reſiſtentiam aquae, quam ob eius continuam mutationem, nullo modo per principia mechanica determinare licet.

§. 2.

§. 2. Remotis autem his impedimentis quaeſtio ad hanc formam ſimpliciſſimam redigatur:

Si corpus quodcunque B C D, plano horizontali politiſſimo incumbens, (vt omnis frictio remoueatur) de puncto B, ope fili B A in puncto A, fixum retineatur, eique motus quicunque imprimatur, inueſtigare motum, quo iſtud corpus deinceps eſt progreſſurum. Tab. III. Fig. 2.

Tentamen Solutionis.

§. 3. Sit maſſa corporis propoſiti B C D $=$ M, eiusque centrum grauitatis ſit in C, momentum vero inertiae, reſpectu axis verticalis puncto C inſiſtentis, ponatur $= Mkk$; longitudo fili ſit A B $= a$ et interuallum B C $= b$. Per punctum A iam ducatur recta fixa A E $= e$, ad quam motus corporis quouis tempore referatur, atque elapſo tempore $= t$ teneat corpus cum filo ſitum in figura expreſſum, ponaturque primo angulus E A B $= \Phi$, et, producta recta C B vſque ad rectam A E in L, vocetur angulus E L B $= \psi$, ita vt tota quaeſtio eo reducatur, vt ad quoduis tempus t iſti bini anguli Φ et ψ determinentur. Ponatur autem quoque breu. gr. differentia horum angulorum $\psi - \Phi =$ A B L $= \omega$.

§. 4. His factis denominationibus determinationem motus aggrediamur; et quia corpus nullas alias vires ſollicitantes ſuſtinet, praeter tenſionem fili A B, ponamus iſtam tenſionem pro hoc tempore $=$ T, ita vt corpus in puncto B vi iſta T in directione B A ſollicitetur. Nunc vt prima principia Mechanicae applicare queamus, pro motu corporis progreſſiuo ex centro C ad axem A E

ducatur

ducatur normalis C X et vocentur binae coordinatae A X $= x$ et X C $= y$, tumque ex figura erit

$$x = a\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,\text{coſ.}\,\psi \quad \text{et} \quad y = a\,\text{ſin.}\,\Phi + b\,\text{ſin.}\,\psi,$$

vnde differentiando colligimus

$$dx = -a\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - b\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi$$
$$dy = +a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + b\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi$$
$$ddx = -a\,dd\Phi\,\text{ſin.}\Phi - a\,d\Phi^2\text{coſ.}\Phi - b\,dd\psi\,\text{ſin.}\psi - b\,d\psi^2\,\text{coſ.}\psi$$
$$ddy = +a\,dd\Phi\,\text{coſ.}\Phi - a\,d\Phi^2\text{ſin.}\Phi - b\,dd\psi\,\text{coſ.}\psi - b\,d\psi^2\,\text{ſin.}\psi.$$

§. 5. Hinc iam ad motum centri grauitatis C definiendum ei tenſio fili T immediate applicata concipiatur, quae ſecundum directiones coordinatarum reſoluta dabit pro directione X A vim $=$ T coſ. Φ et pro directione C X vim $=$ T ſin. Φ, vnde principia motus has duas aequationes ſuppeditant:

$$\frac{ddx}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,\text{coſ.}\,\Phi}{M} \quad \text{et} \quad \frac{ddy}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,\text{ſin.}\,\Phi}{M},$$

vbi elementum temporis dt conſtans eſt aſſumtum, et α denotat celeritatem lapſu libero grauium per vnum minutum ſecundum acquiſitam, ſiquidem tempora in minutis ſecundis, celeritates vero per ſpatia, vno minuto ſecundo percurſa, exprimere velimus.

§. 6. Quoniam autem tenſio fili T penitus eſt incognita, vt eam eliminemus primam aequationem ducamus in ſin. Φ ſecundam vero in coſ. Φ atque differentia dabit: $ddx\,\text{ſin.}\,\Phi - ddy\,\text{coſ.}\,\Phi = 0$, quae aequatio loco ddx et ddy ſubſtitutis valoribus modo ante traditis. induet hanc formam ſatis ſimplicem, ob $\psi - \Phi = \omega$; ſcilicet:

$$a\,dd\Phi + b\,dd\psi\,\text{coſ.}\,\omega - b\,d\psi^2\,\text{ſin.}\,\omega = 0.$$

Simili

Simili modo primae aequationis, ductae in coſ. Φ, et ſecundae in ſin. Φ, ſumma dabit ipſam tenſionis quantitatem

$$T = - M \frac{(d\,d\,x \operatorname{coſ.} \Phi + d\,d\,y \operatorname{ſin.} \Phi)}{\alpha\, d\, t^2},$$

vnde facta ſubſtitutione erit:

$$\frac{T}{M} = \frac{a\, d\, \Phi^2 + b\, d\, d\, \psi \operatorname{ſin.} \omega + b\, d\, \psi^2 \operatorname{coſ.} \omega}{\alpha\, d\, t^2},$$

quam autem cognoſcere non datur, antequam totus motus fuerit exploratus.

§. 7. Praeterea etiam plurimum iuuabit iſtam combinationem in vſum vocare, dum prima per $d\,x$, altera vero per $d\,y$ multiplicatur, vt horum productorum ſumma praebeat hanc aequalitatem:

$$\frac{d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y}{\alpha\, d\, t^2} = - \frac{T}{M} (d\,x \operatorname{coſ.} \Phi + d\,y \operatorname{ſin.} \Phi).$$

At vero eſt $d\,x \operatorname{coſ.} \Phi + d\,y \operatorname{ſin.} \Phi = - b\, d\, \psi \operatorname{ſin.} \omega$, vnde fit

$$\frac{d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y}{\alpha\, d\, t^2} = \frac{T}{M} b\, d\, \psi \operatorname{ſin.} \omega,$$

quae aequatio ideo ſummum vſum praeſtabit, quia membrum ſiniſtrum abſolute integrari poteſt, cum eius integrale ſit $\frac{d\,x^2 + d\,y^2}{2\,\alpha\, d\, t^2}$, vbi notetur eſſe

$$d\,x^2 + d\,y^2 = a\,a\,d\,\Phi^2 + b\,b\,d\,\psi^2 + 2\,a\,b\,d\,\Phi\,d\,\psi \operatorname{coſ.} \omega.$$

§. 8. Expedito motu progreſſivo motum quoque gyratorium noſtri corporis circa centrum grauitatis C inveſtigemus, qui oritur ex mutatione anguli E L C $= \psi$, quippe cuius mutatio dabit quantitatem motus gyratorii. Cum igitur nulla alia vis adſit, praeter tenſionem fili B A $=$ T, cuius momentum reſpectu centri grauitatis C eſt $b\,T \operatorname{ſin.} \omega$, quod tendit ad angulum ψ imminuendum, eius mutatio reperietur, ſi iſtud momentum diuidatur per

 momen-

momentum inertiae corporis, Mkk, vnde ſecundum principia motus oritur iſta aequatio: $\frac{dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\,ſin.\,\omega}{Mkk}$. Hac igitur formula continetur determinatio motus gyratorii.

§. 9. Quodſi hanc aequationem multiplicemus per $d\psi$, orietur

$$\frac{d\psi dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT d\psi\,ſin.\,\omega}{Mkk}.$$

Supra autem vidimus eſſe

$$\frac{dxddx + dyddy}{\alpha dt^2} = \frac{bT d\psi\,ſin.\,\omega}{M}.$$

Quare cum nunc ſit

$\frac{kkd\psi dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bTd\psi\,ſin.\,\omega}{M}$, hinc ſequitur fore

$$\frac{dxddx + dyddy + kkd\psi dd\psi}{\alpha dt^2} = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dx^2 + dy^2 + kkd\psi^2}{2\alpha dt^2} = \text{Conſt.}$$

quae aequatio, loco $dx^2 + dy^2$ ſubſtituto valore ante dato, induet hanc formam:

$$\frac{aad\Phi^2 + (bb + kk)d\psi^2 + 2abd\Phi d\psi\,coſ.\,\omega}{2\alpha dt^2} = C.$$

§. 10. Euidens eſt hanc aequationem inuoluere vim viuam, quae in corpore ineſt, cum $\frac{dx^2 + dy^2}{\alpha dt^2}$ exprimat quadratum celeritatis, qua centrum grauitatis corporis C promouetur, et $\frac{d\psi^2}{\alpha dt^2}$ exprimat quadratum celeritatis angularis; vnde patet, in corpore ſemper eandem quantitatem vis viuae conſeruari, quae ergo ſemper manebit aequalis illi vi vivae, quae corpori initio fuerit impreſſa.

§. 11. Iam igitur aſſecuti ſumus duas aequationes a tenſione fili T liberas, quarum prior, §. 6 inuenta, eſt

eſt differentialis ſecundi gradus; poſteriorem vero modo inuentam ad primum gradum reducere licuit, atque hae duae aequationes totam problematis ſolutionem complectuntur, quae ſunt:

$$\text{I. } a\,d\,d\,\Phi + b\,d\,d\,\psi \cos.\omega - b\,d\,\psi^2 \sin.\omega = 0$$

$$\text{II. } \frac{a\,a\,d\,\Phi^2 + (b\,b + k\,k)\,d\,\psi^2 + 2\,a\,b\,d\,\Phi\,d\,\psi \cos.\omega}{d\,t^2} = f\,f.$$

His enim ad quoduis tempus t bini anguli Φ et ψ determinari debent, namque praeter tempus t ambo tantum anguli Φ et ψ in his aequationibus inſunt, propter $\omega = \psi - \Phi$.

§. 12. Nunc autem loco angulorum Φ et ψ introducamus in calculum ipſas celeritates angulares, quibus corpus partim circa punctum fixum et partim circa proprium centrum grauitatis C gyratur, ponamusque celeritatem angularem circa punctum A $= \frac{d\,\Phi}{d\,t} = u$, et circa centrum grauitatis C celeritatem angularem $\frac{d\,\psi}{d\,t} = v$, hocque modo poſterior aequatio iam penitus ad quantitates finitas reducetur, quippe quae erit:

$$a\,a\,u\,u + (b\,b + k\,k)\,v\,v + 2\,a\,b\,u\,v \cos.\omega = f\,f.$$

Pro priore vero aequatione, cum ſit $d\,\Phi = u\,d\,t$ et $d\,\psi = v\,d\,t$, ob $d\,t$ ſumtum conſtans, erit $d\,d\,\Phi = d\,u\,d\,t$ et $d\,d\,\psi = d\,v\,d\,t$. Quia vero eſt $d\,t = \frac{d\,\Phi}{u}$, itemque $d\,t = \frac{d\,\psi}{v}$, eliminando tempuſculum $d\,t$, erit

$$d\,d\,\Phi = \frac{d\,\Phi\,d\,u}{u} \text{ et } d\,d\,\psi = \frac{d\,\psi\,d\,v}{v},$$

hincque prior aequatio reducetur ad hanc formam:

$$\frac{a\,d\,\Phi\,d\,u}{u} + \frac{b\,d\,\psi\,d\,v}{v} \cos.\omega - b\,d\,\psi^2 \sin.\omega = 0.$$

§. 14. Quia autem haec aequatio praeter celeritates u et v adhuc elementa $d\Phi$ et $d\psi$ continet, ea ex calculo expelli oportet. Cum ergo ſit $d\Phi = u\,d\,t$ et $d\psi = v\,d\,t$, erit $d\psi - d\Phi = d\omega = (v-u)\,d\,t$, vnde fiet

$$d\,t = \frac{d\,\omega}{v-u}, \text{ hincque } d\Phi = \frac{u\,d\,\omega}{v-u} \text{ et } d\psi = \frac{v\,d\,\omega}{v-u},$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit aequatio poſtrema

$$a\,d\,u + b\,d\,v \operatorname{coſ.} \omega - \frac{b\,v\,v\,d\,\omega \operatorname{ſin.} \omega}{v-u} = 0.$$

Sicque duas habemus aequationes inter ternas variabiles v, u, et ω; vnde totum negotium eo redit, vt binae per tertiam definiantur. Quem in finem in eo eſt elaborandum, vt, vna harum trium quantitatum eliſa, ad vnicam aequationem, binas tantum variabiles inuoluentem, ſolutio perducatur.

§. 15. Hic quidem primo videtur ex aequatione finita quaeri poſſe valorem coſ. ω, qui cum ſuo differentiali in altera aequatione ſubſtitutus produceret aequationem differentialem inter binas celeritates u et v, quae autem tantopere erit perplexa, vt nihil plane inde concludi queat. Verum in alium modum incidi, ad duas tantum variabiles perueniendi, per aequationem multo ſimpliciorem, quae autem nihilominus ita eſt comparata, vt omnia artificia analytica adhuc cognita fruſtra pro ea euoluenda in ſubſidium vocentur. Interim tamen haud inutile videtur, hanc ipſum operationem hic ob oculos exponere, quo clarius pateat, cuiusmodi incrementis Analyſis adhuc indigeat.

§. 16. Hic primo ſtatim ponatur $u = p\,v$ et aequatio iam erit:

$$(aapp + bb + kk + 2abp \operatorname{coſ.} \omega) vv = ff,$$

quae, poſito porro $bb + kk = bc$, fit ſimplicior, ſcil.

$$vv(aapp + bc + 2abp \operatorname{coſ.} \omega) = ff,$$

vbi notaſſe iuuabit, ſi corpus ex ipſo puncto B ſuſpenderetur, diſtantiam centri oſcillationis ab hoc puncto futuram eſſe $= b + \frac{kk}{b} = c$. Praeterea vero faciamus $b \operatorname{coſ.} \omega = z$, et aequatio noſtra induet hanc formam:

$$vv(aapp + bc + 2apz) = ff,$$

quae per logarithmos dat

$$2lv + l(aapp + bc + 2apz) = 2lf,$$

vnde differentiando fit

$$\frac{dv}{v} = \frac{-aapdp - a(pdz + zdp)}{aapp + bc + 2apz}.$$

§. 17. Simili modo etiam in altera aequatione differentiali, poſito $u = vp$ et $b \operatorname{coſ.} \omega = z$, vt fiat $b\, d\omega \operatorname{ſin.} \omega = -dz$, habebimus,

$$a(pdv + vdp) + 2dv + \frac{vdz}{1-p} = 0,$$

quae per v diuiſa praebet

$$\frac{dv}{v} = -\frac{adp}{ap+z} - \frac{dz}{(1-p)(ap+z)}.$$

Hic iam loco $\frac{dv}{v}$ ſubſtituatur valor ante inuentus, orieturque ſequens aequatio inter binas variabiles p et z:

$$\frac{adp}{ap+z} + \frac{dz}{(1-p)(ap+z)} = \frac{aapdp + a(pdz + zdp)}{aapp + bc + 2apz},$$

quae ſublatis fractionibus reducitur ad hanc:

$$a(1-p)(bc - zz)dp + (bc + aap^3 + apz(1+p))dz = 0.$$

§. 18. Ecce ergo tota Problematis noſtri Solutio perducta eſt ad hanc aequationem differentialem primi gradus, parum complicatam, inter binas variabiles p et z, vnde ſi licuerit z per p modo finito definire, etiam quadratum $v v$ per p definiretur, hincque porro altera celeritas $u = p v$; quam ob rem plurimum optandum eſſet vt Geometrae vires ſuas excercerent in iſta aequatione reſoluenda. Vbi notaſſe iuuabit, ſi vltimum membrum $p z (1 + p)$ abeſſet, totam aequationem nulla difficultate eſſe laboraturam, quia ſeparationem variabilium ſponte admitteret: foret enim $\frac{(1 - p)\, d p}{b c + a a p^3} = \frac{d z}{b c - z z}$. Ante autem quam haec inuentio fuerit facta, vlterius progredi non licet.

Supplementum.

continens Solutionem perfectam Problematis.

§. 19. Poſtquam praecedens ſcriptum abſolueram, prorſus deſperans de reſolutione aequationis differentialis, ad quam ſum perductus, nihilo tamen minus rem variis modis deinceps tentaui, et tandem per longas ambages contigit mihi eruere aequationem integralem, atque adeo algebraicam, quam hic comunicaturus ſum; ipſam autem Analyſin, qua ſum vſus, in aliam occaſionem reſeruare eſt viſum.

§. 20. Perueneram autem ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$a (1 - p) (b c - z z)\, d p + b c + a a p^3 + a p z (1 + p)\, d z = 0,$$

vbi

vbi ex praecedentibus elementis erat $p = \frac{n}{v}$, $z = b$ coſ. ω et $bc = bb + kk$. Hanc aequationem porro, ponendo $z = as$ et $\frac{bb + kk}{aa} = nn$, ita vt ſit $s = \frac{b}{a}$ coſ. ω, ad hanc formam ſimpliciorem reduxi:

$$dp(1-p)(nn-ss)+ds(nn+p^3+ps(1+p))=0,$$

quippe quae, praeter binas variabiles p et s, vnicam conſtantem nn involvit, atque huius aequationis integrale completum inueni eſſe

$$\frac{nn+ps+p+s}{\sqrt{nn+pp+2ps}} = C.$$

§. 21. Quoniam autem Analyſin, quae me huc perduxit, exponendam in aliud tempus reſeruo, hic ſufficiet veritatem huius integralis demonſtrare. Oſtendam enim, ſi haec formula differentietur, tum ipſam aequationem integrandam renera reſultare. Euidens autem eſt, differentiale huius formulae fore fractionem, cuius denominator eſt $(nn+pp+2ps)^{\frac{3}{2}}$, per quam ergo ſi aequatio propoſita diuidatur, integrabilis euadat neceſſe eſt.

§. 22. Numerator iſtius differentialis duabus conſtabit partibus, altera per dp altera per ds affecta; vtramque igitur ſeorſim inueſtigemus. Ac prior quidem pars erit

$$dp(s+1)(nn+pp+2ps)-dp(p+s)(nn+ps+p+s)$$

quae reducitur ad hanc formam: $dp(1-p)(nn-ss)$, quae eſt ipſa pars prior aequationis propoſitae. Simili modo reperitur altera pars

$$=ds(p+1)(nn+pp+2ps)-pds(nn+ps+p+s),$$

quae

quae reducitur ad $ds(nn+p^3+ps(1+p))$, id quod cum membro ſecundo aequationis propoſitae conuenit.

§. 23. Ex hac igitur aequatione integrali definiri poterit s per p, cuius valor ita ſe habet:

$$s = \frac{CCp-(p+1)(p+nn) \pm C\sqrt{(CCpp+(pp-1)(pp-nn))}}{(p+1)^2};$$

vnde, ob $s = \frac{b\ \text{coſ.}\ \omega}{a}$, angulus ω per variabilem p exprimitur. Deinde vero aequatio integralis primum inuenta

$$ff = (aapp + bc + 2abp\ \text{coſ.}\ \omega)vv,$$

ob $\frac{bc}{aa} = nn$, dabit $vv = \frac{ff}{aa(nn+pp+2ps)}$, ideoque etiam v per p definitur, cum ſit $v = \frac{f}{a\sqrt{(nn+pp+2ps)}}$, vnde ob poſitum $u = pv$ erit etiam $u = \frac{fp}{a\sqrt{(nn+pp+2ps)}}$. Hinc porro etiam ipſi anguli ψ et Φ per has formulas integrandas inueſtigantur: $\Phi = \int \frac{u\,d\omega}{v-u}$ et $\psi = \int \frac{v\,d\omega}{v-u}$; ac denique, cum ſit $\frac{d\Phi}{u} = dt$, vel etiam $\frac{d\psi}{v} = dt$, ipſum quoque tempus t per eandem variabilem p determinabitur. Erit enim $t = \int \frac{d\omega}{v-u}$, ſicque omnia ſunt determinata quae ad perfectam Problematis ſolutionem ſpectant.

§. 24. Praeterea vero etiam notaſſe iuuabit inter ternas variabiles v, u et ω duas aequationes algebraicas dari poſſe; ſi enim in integrali aequatione inuenta loco p ſcribatur $\frac{u}{v}$, ob $\sqrt{(nn+pp+2ps)} = \frac{f}{av}$ et $s = \frac{b\ \text{coſ.}\ \omega}{a}$, erit illa aequatio

$$Cf = b\ \text{coſ.}\ \omega\,(v+u) + a(u+nnv).$$

Ante autem iam inueneramus eſſe

$$\frac{ff}{aa} = nnvv + uu + \frac{2b}{a}uv\ \text{coſ.}\ \omega.$$

§. 25.

§. 25. Initio vero iam inueneramus aequationem differentialem inter easdem ternas variabiles v, u, ω, quae erat: $a\,d\,u + b\,d\,v\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{b\,v\,v\,d\,\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{v - \omega}$. Haec ergo cum binis praecedentibus integralibus conuenire debet, quae, ſi conſtantes per integrationem ingreſſas pauliſper mutemus, ponendo $\frac{f}{u} = g$ et $\frac{fC}{a} = b$, erunt:

$$g\,g = u\,u + n\,n\,v\,v + \frac{2\,b\,u\,v}{a}\,\text{coſ.}\,\omega$$

$$b = \frac{b\,\text{coſ.}\,\omega}{a}\,(v + u) + u + n\,n\,v,$$

atque hanc conuenientiam contemplanti haud difficile erit viam multo planiorem inuenire, quae ad eandem integrationem, tanto labore erutam, perducat.

SOLVTIO GEMINA PROBLEMATIS, QVO MOTVS CORPORIS, FILO ALICVBI ALLIGATI, SVPER PLANO HORIZONTALI QVAERITVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum nuper hanc quaeſtionem tractaſſem, perueni ad aequationem differentialem primi gradus, inter binas variabiles, non nimis complexam, quae autem ita erat comparata, vt omnia Calculi artificia adhuc cognita ei reſoluendae non ſufficere viderentur. Poſtquam autem rem pluribus modis tentaſſem, tandem per longas ambages ad eius integrationem ſum perductus, atque adeo ſumma admiratione deprehendi, eius integrale algebraice exprimi poſſe. Tum vero temporis contentus fui, ipſam tantum aequationem integralem cum publico communicare, ſimul pollicitus, totam Analyſin, qua eo ſum deductus, alia occaſione ob oculos ponere, quod igitur nunc praeſtare conſtitui. Deinde vero aliam ſolutionem eiusdem quaeſtionis multo ſimpliciorum ſum adeptus, quam hic etiam expoſiturus ero.

So-

Solutio prior Problematis.

§. 2. Sit B C D corpus propoſitum, cuius maſſa ſit $= M$, et centrum grauitatis in C, cuius reſpectu momentum inertiae ſit $M k k$, hocque corpus in B alligatum ſit filo $B A = a$, in puncto A fixo; puncti porro B diſtantia a centro grauitatis ſit $B C = b$, quibus poſitis elapſo tempore $= t$ referatur corpus ad axem fixum A E, ponaturque angulus $E A B = \Phi$, et, producta recta C B vsque ad hunc axem in L, vocetur angulus $E L B = \psi$, qui ergo ſuperat angulum priorem Φ angulo $A B L = \omega$, ita vt ſit $\omega = \psi - \Phi$. Tab. III. Fig. 2.

§. 3. Calculo igitur ſecundum principia motus ad haec elementa applicato, poſui porro celeritatem angularem puncti B circa $A = u$, puncti vero C circa $B = v$, ita vt ſit $u = \frac{d\Phi}{dt}$ et $v = \frac{d\psi}{dt}$. Deinde poſui $u = p v$ et $b \operatorname{coſ.} \omega = z$, ac breuitatis gratia feci $b b + k k = b c$, hincque aequatio differentialis prodiit iſta:

$$a(1-p)(bc - zz)dp + (bc + aap^3 + apz(1+p))dz = 0$$

quae autem, poſito $z = a s$ et $\frac{bc}{aa} = n n$, ad hanc formam ſimpliciorem reducitur:

$$dp(1-p)(nn - ss) + ds(nn + p^3 + ps(1+p)) = 0$$

vbi ergo eſt $s = \frac{b \operatorname{coſ.} \omega}{a}$ et $n n = \frac{bb + kk}{aa}$; ſicque in hanc aequationem inter binas variabiles p et s vnica quantitas conſtans, et quidem data, $n n$ ingreditur. In id igitur mihi erat incumbendum, vt iſtius aequationis integrale inueſtigarem.

§. 4. Quoniam in hac aequatione quatuor terminorum ſpecies reperiuntur, vbi ſcilicet binae variabiles p

 et

et s vel vnicam tantum dimenſionem, vel duas, vel tres, vel quatuor, obtinent; has quatuor partes ſeorſim repraeſento:

I. $nn(dp+ds)$ III. $psds-ssdp$

II. $-nnpdp$ IV. $pssdp+pp(p+s)ds$.

§. 5. Incipiamus nunc a parte vltima, quam autem, ponendo $s=pq$, primo in hanc formam transfundamus: IV. $=p^3q(2q+1)dp+p^4(1+q)dq$. Iam ſi haec forma diuidatur per $p^4q(2q+1)$, fiet integrabilis; erit enim $\frac{IV}{p^4q(2q+1)}=\frac{dp}{p}+\frac{(1+q)dq}{q(2q+1)}$; vnde integrando colligitur $\int\frac{IV}{p^4q(2q+1)}=l\frac{pq}{\sqrt{(2q+1)}}$. Hinc, retrogrediendo ad differentialia, erit

$$IV=p^4q(2q+1)\,d.\,l\frac{pq}{\sqrt{(2q+1)}}.$$

Quare ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{pq}{\sqrt{(2q+1)}}=r$, vt ſit

$p=\frac{r\sqrt{(2q+1)}}{q}$ erit IV $=\frac{r^3(2q+1)^3}{q}dr$.

Poſito porro $\frac{r(2q+1)}{q}=t$, ob

$r=\frac{qt}{2q+1}$, erit IV $=t^3dr=t^3\,d.\frac{qt}{2q+1}$.

§. 6. Formula tertia $psds-ssdp$, ita repraeſentata: $pss(\frac{ds}{s}-\frac{dp}{p})$, ſtatim dat hanc expreſſionem: III $=pss.\,d.\,l\frac{s}{p}$, ſiue, loco s et p ſubſtitutis valoribus,

$$III=p^3qq.\,d.\,l\,p=\frac{t^3q}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}dq\ (\text{ob } p=\frac{t}{\sqrt{(2q+1)}}).$$

Erit ergo

$$\frac{III}{t^3}=\frac{qdq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}=d.\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}},\ \text{ideoque III}=t^3.\,d.\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}.$$

§. 7. Colligamus iam tertiam et quartam partem, quarum ſumma erit $III + IV = t^3 . d. (\frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\surd(2q+1)})$. Reliquae duae partes facili negotio eruentur. Cum enim ſit $II = - nnpdp = - \frac{nn}{2} d.pp$, loco p ſcribendo valorem inuentum $\frac{t}{\surd(2q+1)}$, erit $II = - \frac{1}{2} nn. d. \frac{tt}{2q+1}$. Prima denique, quae eſt $nn(dp + ds) = nn. d. (p+s)$, erit

$$I = nn. d. p(1+q) = nn. d. \frac{(1+q)t}{\surd(2q+1)}.$$

Ergo colligendo fiet

$$I + II = \frac{1}{2} nn. d. (\frac{2(1+q)t}{\surd(2q+1)} - \frac{tt}{2q+1}).$$

§. 8. Ponatur nunc

$$\frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\surd(2q+1)} = P \text{ et } \frac{2(1+q)}{\surd(2q+1)} - \frac{t}{2q+1} = Q,$$

eritque $I + II = \frac{1}{2} nnt\, d.\, Q$ et $III + IV = t^3 . d. P$, ideoque habebimus

$$I + II + III + IV = 0 = t^3 dP + \tfrac{1}{2} nn(tdQ + Qdt).$$

Cum autem ſit

$$P - \tfrac{1}{2} Q = \frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\surd 2q+1} - \frac{q+1}{\surd 2q+1} + \frac{t}{2(2q+1)} = \frac{t}{2}$$

erit $Q = 2P + t$, quo ſubſtituto aequatio propoſita tandem in hanc ſimpliciorem transmutatur:

$$t(nn + tt)dP + nnPdt - nntdt = 0$$

ſiue in hanc:

$$dP + \frac{nnPdt}{t(nn+tt)} = \frac{nndt}{nn+tt}.$$

§. 9. Conſideretur iam coefficiens ipſius P, qui eſt $\frac{nndt}{t(nn+tt)} = \frac{dt}{t} - \frac{tdt}{nn+tt}$, cuius integrale eſt $l \frac{t}{\surd(nn+tt)}$. Quamobrem tota aequatio, ſi per fractionem $\frac{t}{\surd(nn+tt)}$ multiplicetur, fiet integrabilis. Prodit enim

$$\frac{t\,d\,P}{\sqrt{(nn+tt)}}+\frac{nn\,P\,dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}}=\frac{nnt\,dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{P\,t}{\sqrt{(nn+tt)}}=-\frac{nn}{\sqrt{(nn+tt)}}+C,$$

vnde colligitur $P\,t=C\sqrt{(nn+tt)}-nn$. Cum igitur poſuerimus

$$P=\frac{q\,t}{2q+1}+\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}},\text{ erit etiam}$$

$$P\,t=\frac{q\,t\,t}{2q+1}+\frac{t(q+1)}{\sqrt{(2q+1)}},$$

vnde naſcitur haec aequatio algebraica:

$$C\sqrt{(nn+tt)}-nn=\frac{q\,t\,t}{2q+1}+\frac{t(q+1)}{\sqrt{2q+1}},$$

quae, ſubſtituendo loco t valorem $p\sqrt{(2q+1)}=\sqrt{p(2s+p)}$, ad hanc reducitur:

$$C\sqrt{(nn+2ps+pp)}-nn=p+s+ps,$$

ſiue ad hanc:

$$C=\frac{nn+p+s+ps}{\sqrt{(nn+2ps+pp)}},$$

quod eſt integrale completum aequationis differentialis propoſitae:

$$dp(1-p)(nn-ss)+ds(nn+p^3+ps(1+p))=0$$

Altera ſolutio multo ſimplicior et elegantior.

§. 10. Hanc ſolutionem mihi immediate ex primis formulis differentio-differentialibus deriuare licuit, quae, poſitis coordinatis $AX=x$ et $XC=y$ et tenſione fili $AB=T$, ſunt:

$$\text{I. }\frac{ddx}{\alpha\,dt^2}=-\frac{T\,\text{coſ.}\,\Phi}{M};\quad\text{II. }\frac{ddy}{\alpha\,dt^2}=-\frac{T\,\text{ſin.}\,\Phi}{M};$$

$$\text{III. }\frac{dd\psi}{\alpha\,dt^2}=-\frac{T\,b\,\text{ſin.}\,\omega}{M};$$

vbi

vbi α denotat celeritatem, lapſu grauium libero vno minuto ſecundo acquiſitam. Coordinatae autem x et y ita per angulos Φ et ψ definiuntur, vt ſit

$$x = a \operatorname{coſ.} \Phi + b \operatorname{coſ.} \psi \text{ et } y = a \operatorname{ſin.} \Phi + b \operatorname{ſin.} \psi,$$

vnde differentiando ſit

$$dx = -a\,d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi - b\,d\psi \operatorname{ſin.} \psi$$
$$dy = +a\,d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi + b\,d\psi \operatorname{coſ.} \psi$$
$$ddx = -a\,dd\Phi \operatorname{ſin.} \Phi - a\,d\Phi^2 \operatorname{coſ.} \Phi - b\,dd\psi \operatorname{ſin.} \psi - b\,d\psi^2 \operatorname{coſ.} \psi$$
$$ddy = +a\,dd\Phi \operatorname{coſ.} \Phi - a\,d\Phi^2 \operatorname{ſin.} \Phi + b\,dd\psi \operatorname{coſ.} \psi - b\,d\psi^2 \operatorname{ſin.} \psi$$

§. 11. Iam formulae ita combinentur; primo ſcilicet $\text{I} \operatorname{ſin.} \Phi - \text{II} \operatorname{coſ.} \Phi = 0$, quae ergo, facta ſubſtitutione, dabit hanc aequationem:

$$a\,dd\Phi + b\,dd\psi \operatorname{coſ.} \omega - b\,d\psi^2 \operatorname{ſin.} \omega = 0.$$

Deinde fiat iſta combinatio: $\text{I.} \operatorname{coſ.} \Phi + \text{II} \operatorname{ſin.} \Phi = -\frac{T}{M}$, vnde ergo naſcitur haec aequatio:

$$a\,d\Phi^2 + b\,dd\psi \operatorname{ſin.} \omega + b\,d\psi^2 \operatorname{coſ.} \omega = \frac{T}{M}.$$

At vero ex tertia formula eſt $\frac{T}{M} = \frac{kk\,dd\psi}{b \operatorname{ſin.} \omega}$, vnde ſubſtituto hoc valore in ſuperiore aequatione erit

$$kk\,dd\psi + ab\,d\Phi^2 \operatorname{ſin.} \omega + bb\,dd\psi \operatorname{ſin.} \omega^2 + bb\,d\psi^2 \operatorname{ſin} \omega \operatorname{coſ.} \omega = 0.$$

§. 12. Duas igitur nacti ſumus aequationes differentiales ſecundi gradus, quas hoc modo per litteras A et B indicemus:

$$\text{A} = a\,dd\Phi + b\,dd\psi \operatorname{coſ.} \omega - b\,d\psi^2 \operatorname{ſin.} \omega = 0.$$
$$\text{B} = kk\,dd\psi + ab\,d\Phi^2 \operatorname{ſin.} \omega + bb\,dd\psi \operatorname{ſin.} \omega^2 + bb\,d\psi^2 \operatorname{ſin.} \omega \operatorname{coſ.} \omega = 0,$$

in quas tantum bini anguli Φ et ψ, vna cum $\omega = \psi - \Phi$ ingrediuntur, et nunc totum negotium eo redit, vt eiusmodi

di combinatio harum aequationum inſtituatur, quae ad formulam integrabilem perducat. Hoc autem praeſtabit iſta combinatio: B + A $(a + b\,\text{coſ.}\,\omega) = 0$, vnde oritur iſta aequatio

$$\left.\begin{array}{l} kkdd\psi + abd\Phi^2\text{ſin.}\omega + bbdd\psi\,\text{ſin}\,\omega^2 + bbd\psi^2\text{ſin.}\omega\,\text{coſ.}\omega \\ + aadd\Phi - abd\psi^2\text{ſin.}\omega + bbdd\psi\,\text{coſ.}\omega^2 - bbd\psi^2\text{ſin.}\omega\,\text{coſ.}\omega \\ \qquad + abdd\psi\,\text{coſ.}\omega \\ \qquad + abdd\Phi\,\text{coſ}\,\omega \end{array}\right\} = 0.$$

§. 13. In hac aequatione occurrit terminus $ab\,\text{ſin.}\,\omega$, qui ob $d\psi - d\Phi = d\omega$ praebet hoc membrum:

$$- a\,b\,d\,\omega\,(d\Phi + d\psi)\,\text{ſin.}\,\omega,$$

ſicque nunc noſtra aequatio, vlterius reducta, erit:

$$\left.\begin{array}{l} kkdd\psi + aadd\Phi - abd\omega\,\text{ſin.}\,\omega\,(d\Phi + d\psi) \\ + bbdd\psi + abdd\Phi\,\text{coſ.}\,\omega \\ + abdd\psi\,\text{coſ.}\,\omega \end{array}\right\} = 0$$

ſiue

$$aadd\Phi + ab\,(dd\Phi + dd\psi)\,\text{coſ.}\,\omega + (bb + kk)\,dd\psi$$
$$- a\,b\,d\,\omega\,(d\Phi + d\psi)\,\text{ſin.}\,\omega = 0.$$

Vbi iam manifeſtum eſt, huius aequationis integrale eſſe

$$ab\,(d\Phi + d\psi)\,\text{coſ.}\,\omega + aad\Phi + (bb + kk)\,d\psi = C\,dt.$$

Quia enim elementum dt conſtans eſt aſſumtum, id propter homogeneitatem conſtanti eſt adiungendum.

§. 14. Egregie autem haec aequatio integralis conuenit cum ea quam methodo priore inuenimus; ad quod oſtendendum introducamus celeritates angulares u et v, et cum ſit $\frac{d\Phi}{dt} = u$ et $\frac{d\psi}{dt} = v$, habebitur iſta aequatio:

Iam

$$a b \operatorname{cof.} \omega (u + v) + a a u + (b b + k k) v = C.$$

Iam haec aequatio, per $a a$ diuiſa, et poſito vt ſupra fecimus

$\frac{b \operatorname{cof.} \omega}{a} = s$ et $\frac{b b + k k}{a a} = n n$, hanc induet formam:

$$s (u + v) + u + n n v = C.$$

Nunc fiat $u p = v$, eritque $v s (p + 1) + p v + n n v = C.$ At vero principium conſeruationis virium vivarum in praecedente diſſertatione perduxit ad hanc aequationem:

$$f f = a a v v (n n + p p + 2 p s),$$

vnde deducitur $v = \frac{f}{a \sqrt{(n n + p p + 2 p s)}}$, qui valor in noſtra aequatione ſubſtitutus ſuppeditat ſequentem:

$$C = \frac{f}{a} \frac{n n + p + s + p s}{\sqrt{(n n + p p + 2 p s)}} \text{ ſiue } \frac{n n + p + s + p s}{\sqrt{(n n + p p + 2 p s)}} = \frac{C a}{f},$$

quae eſt ea ipſa aequatio, ad quam nos praecedens integratio perduxit. Manifeſtum igitur eſt, hanc poſteriorem integrationem priore multo eſſe ſimpliciorem et elegatiorem.

ANNOTATIONES
CIRCA CONSTRVCTIONEM ET VSVM
ACVS INCLINATORIAE
ET
DETERMINATIO INCLINATIONIS MAGNETICAE PETROPOLI AD FINEM ANNI 1778.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Acus declinatoria, vtiliſſima illa curſus nautici moderatrix, ad eum, quo hodie praedita eſt, perfectionis gradum euehi potuiſſet, etiamſi de inclinatione magnetica nihil fuiſſet cognitum. Aliter vero res ſe habet, ſi de declinationis magneticae legibus, eiusque in locis diuerſis & diuerſis temporibus variationum theoria, rei nauticae ſucceſſibus non minus profutura, quaeſtio ſit: huius enim theoriae perficiendae ſpes fere nulla videtur, niſi vtriusque phaenomeni magnetici obſeruationes indiuulſo nexu copulentur; vnde, quicquid ad acum inclinatoriam perficiendam valet, vtilitatis in re nautica titulo phyſicorum attentionem ſibi vindicat, ſi vel maxime a magnetiſmi terreſtris, cuius cauſſam natura intimis terrae receſſibus abdidit, ſingularitate diſceſſeris. Acus inclinatoriae experimentis intentus, in me-

methodum inclinationis magneticae tali acu definiendae, vſitatis concinniorem mihi viſam, & in ipſius acus vlterius perficiendae facile aliquod artificium incidi, quas qualescunque annotationes meas, ſi quis forte earum vſus eſſe poſſit, hic exponere conſtitui.

§. 2. Acus inclinatoria, circa quam hae annotationes verſantur, ea eſt, quam Illuſtris *Daniel Bernoulli*, iam ante hos viginti tres annos, magno ingenii acumine primus in lucem protulit (*), cuius autem vſus, non obſtante inſigni, quo aliis eiusmodi inſtrumentis omnibus palmam praeripit, perfectionis gradu, mirum quam parum aut innotuerit obſeruatoribus aut inter eos inualuerit. Cuius igitur cum hic mihi deſcriptio eſſet praemittenda; eam ita confici operae pretium fuit, vt praecipua ad adcuratam eius conſtructionem neceſſaria praecepta traderem et ſingulorum ad inſtrumenti perfectionem momenta in ſubiunctis notis expenderem. Primaria pro acus inclinatoriae *Bernoullianae* conſtructione praecepta huc potiſſimum redeunt:

I. Acus ipſa, ex chalybe puro, homogeneo et optime indurato paranda, ſiguram habeat parallelepipedi, in vtraque extremitate ita acuminati, vt linea recta, bina eius acumina iungens, per mediam eius altitudinem et craſſitiem tranſeat. Longitudo acus ſit circiter 16 pollicum; altitudo 4 lin. et craſſities

 me-

(*) Vid Journal des Scavans Janvier 1757. et Memoire ſur la maniere de conſtruire les Bouſſoles d'Inclinaiſon par Mr. *Dan. Bernoulli.*

media $1\frac{1}{2}$ lin. (*a*). Acus ſecundum has dimenſiones conſtruendae maſſa, ex vtroque latere ita diſtribuatur, vt centrum eius grauitatis ſaltem proxime in medium eius punctum cadat.

II. Acus, praeliminario modo ita aequilibratae, vtrique lateri in medio lineae bina eius acumina iungentis afferruminetur cuſpis chalybea, diametri dimidiae circiter lineae (*b*) et duas tresue lineas longa, ex-

---

(*a*) Acus dimenſiones duplici quaſi limite circumſcribuntur: primo enim longitudinem acus talem eſſe oportet, vt limbi, eius obliquitates menſurantis, diuiſio ne ſit uimis parua; adde, quod, ceteris paribus, acus longiores maioris, quam breuiores, magnetiſmi capaces ſint. Contra vero illae dimenſiones etiam tales ſint neceſſe eſt, vt acus, ex axe ſuo horizoutaliter ſuſpenſa, proprio ſuo pondere quam minime incuruetur; qua ſcilicet inflexione centrum grauitatis eius alios atque alios in diuerſis acns obliquitatibus ſitus adipiſcitur, vt, ſi vel maxime in vna acus poſitione in centrum ſuſpenſionis eius fuerit reductum, in omnibus aliis infra id centrum deprimatur; id, quod obſeruationes tali acu inſtitntas non erroneas reddere non poteſt. Imminuitur vero iſta acus flexibilitas, non ſolum augendo materiae, ex qua conſtruitur, rigiditatem, vnde eam ex chalybe probe indurato conſtrui conuenit, quo ipſo ſimul vis magneticae tenacior euadit; ſed augendo quoque eius altitudinem et minuendo eius longitudinem, cuius ſcilicet biquadrato, ceteris paribus, acuum a proprio ſuo pondere incuruationes proportionales ſunt. Craſſitiem acus quod attinet, commode vſu venit, vt eius imminutio, ad vis magneticae acui imprimendae intenſitatem optabilis, acus flexibilitatem non augeat. Praeſcriptas hic dimenſiones Ill. *Bernoulli* acubus inclinatoriis idoneas experimentis comprobauit.

(*b*) Cuſpides hae tales ſint oportet, vt frictio earum vel in cubili, cui immittuntur, vel ſuper fulcro, cui ſuper imponuntur, ſit quam mini-

exacte cylindrica (*c*), duriſſima et politiſſima, al-

 tera

---

minima. Immiſſionem axis in bina cubilia, licet talis acus ſuſpenſio id commodi praeſtet, vt in ea centrum grauitatis acus ad axem reductum, quieſcat atque acus circa id ipſum centrum immobile conuertatur, Ill. *Bernoulli* tamen in acubus inclinatoriis plane non admittit, propterea quod acus ita ſuſpenſae oſcillationes motu axis *radente* peragantur; in quo motu frictio ineuitabilis eſt; quae cum vi magneticae inclinatrici, in ratione ſinus elongationis acus a vera ipſius inclinatione magnetica decreſcenti facile aequalis fieri poſſit; acum ad quietem reducere valet, licet ea adhuc notabiliter a iuſta ſua inclinatione elongata ſit. Acus inclinatoriae *Bernoullianae* axis fulcro horizontali (III.) ſuper imponitur, ſuper quo, dum oſcillat acus, axis non niſi motum pure *voluentem* habet, a quo motu omnis abeſt frictio, et quae, ſi qua ſit, non ſolum axis et fulcri laeuigatione et duritie, atque materiarum, axis chalybei et fulcri vitrei, heterogeneitate, ſed per id quoqne inſenſibilis redditur, quod cuſpides ſint cylindricae adeoque omnis earum cum fulcro contactus, ſi fulcrum fuerit *planum*, ad *lineam*; ſi vero fulcrum quoque ſit cylindricum, eique cuſpides tranſuerſim imponantur, ad *punctum* teducatur. Licet vero in tali axis acus ſuper fulcrum ſuperimpoſitione centrum grauitatis acus ad axem reductum non quieſcat, ſed, ob motum axis ſuper fulcro horizontali volutorium, alternatim, dum oſcillat acus, horizontaliter progrediatur et regrediatur: tamen acus hoc modo mobilis grauitate ſua nullatenus impeditur, quominus vi inclinatrici magneticae liberrime obſequi poſſit, propterea quod acus ita poſitae centrum grauitatis, licet non quiescat, tamen, non obſtante motu ſuo, ſemper in linea verticali per punctum contactus axis cum fulcro verſetur. Cum tamen motum hunc centri grauitatis horizontalem quam minimum eſſe conueniat: diametrum cuſpidum eſſe quam minimam oportet, ſalua tamen altera conditione, vt pondus acus absque vlla inflexione ferre queant; vnde ne nimium onerentur, pondus acus ne ſit nimis magnum oportet. Acus ſupra deſcriptae pondus inueni 507 granorum.

(*c*). Licet a non perfecta cuspidum cylindricitate, ſi verbi cauſſa ellipſoidicae ſint in ratione axium 1 ad 0, 95, iam errores aliquot

gra-

tera alteri exacte aequales (*d*) atque eum in modum vtraque poſitae, vt earum bini axes in vnam eandemque lineam rectam cadant, plano verticali oſcillationis acus, exacte normalem.

III. Conſtruatur fulcrum inclinatorium, totum orichalceum fig. 3 expreſſum Conſtat id cylindro recto A B C D E F G diametri vnius circiter pollicis et vnum pedem alto. A ſummitate huius cylindri vsque ad profunditatem, dimidia acus longitudine paulo maiorem, in ipſo eius medio verticaliter inſcindatur rima *a b c d f* a cylindri axe vtrinque duas, adeoque in vniuerſum quatuor lineas lata. Inferior huius cylindri pars ſolida per planum circulare H, radii trium circiter pollicum, ipſi concentricum normaliter transfixa, immittitur verticaliter foramini circulari eiusdem cum cylindro diametri plani K L, ope quatuor cochlearum et duarum

Tab. III.

graduum in obſeruationes, tali acu et tali modo ſuper fulcro poſita inſtitutas irrepere poſſint (vid. Ill. *Bernoulli* diſſertatio ſupra allegata : tamen modus quo ad tornum efformantur iſtae cuſpides, artificis dexteritate, ſatis praeciſionis admittit, vt errores hinc oriundi inſenſibiles reddi queant, quod ſi ſperare non liceret ; modus *Bernoullianus* acum ſuſpendendi hic expoſitus plane non admitti poſſet.

(*d*) Ad euitandam polorum magneticorum in acu ſibi ſuccedentium pluralitatem ſeu puncta, vt vocantur conſequentia, intereſt quidem, acus continuitatem ſecundum longitudinem quam minime interrumpi (vid Cel. *Zeiheri* diſſ. Nov. Comment. Tom. VII. p. 309); tamen etiam absque ſenſibili incommodo acum noſtram inclinatoriam in medio perforari et cuſpidem continuam transfigi poſſe puto; quam adeo cuſpidem ex hoc foramine ſubinde eximi poſſe conducet. vid. nota (*h*).

rum libellarum hydroſtaticarum ad ſitum horizontalem reducendi, ſuper quo plano totus cylinder vna cum plano circulari ipſi affixo circa axem ſuum verticalem immobilem verſatilis eſt, ſecundum graduationem circuli M N in plano K L deſcripti et cylindro concentrici. Rimae *a b c d f* binae acies ſuperiores *a b* et *d f* duos portant cylindrulos vitreos horizontales, aequales, politiſſimos, acierum longitudini et alterum alteri parallelos atque ambos ita poſitos, vt eorum ſummae ſuperficies exacte in vno eodemque plano, eoque ad axem cylindri verticalem normali, ſitae ſint (*e*). Poſticus denique rimae *a b c d f* paries E F G portat limbum ſemicircularem verticulem P Q R, diametri longitudine acus tantillum minoris, cuius radius verticalis cum axe cylindri coincidat, et ex cuius centro ſuper limbi plano deſcriptus eſt ſemicirculus, radii acus dimidiae longitudini aequalis, in gradus eorumque partes aliquotas diſtincte diuiſus et in parte ſua infima per foramen Q cylindri viſibilis.

IV. Cylindro fulcri inclinatorii ad ſitum verticalem, adeoque plano cylindrulorum vitreorum ad ſitum horizontalem, exacte reducto; his cylindrulis transverſim et ad eorum longitudinem normaliter impona-

(*e*) Vt ſcilicet, cylindro ad ſitum verticalem reducto, hoc planum ſit perfecte horizontale. Errores, qui a plani huius ſitu tantillum obliquo oriuntur, eo ſunt maiores, quo maior eſt cuſpidum diameter: vnde eam ob hanc quoque cauſſam eſſe minimam oportet. vid. nota (*b*).

ponantur cuſpides acus, atque haec, ope limae more conſueto, ita aequilibretur, vt centrum grauitatis eius, quam fieri poteſt, proxime in medium axis punctum cadat (*f*). Acus ita aequilibratae

---

(*f*) Si centrum grauitatis acus 1) exacte ad centrum axis acus reduci poſſet et 2) in quacunque acus obliquitate in iſto loco perſeueraret: acus inclinatoria hactenus deſcripta ſummo perfectionis gradu gauderet, propterea quod, frictione artificiis modo expoſitis vel deſtructa vel certe inſenſibili reddita, talis acus, vi magnetica imbuta et ſuper fulcro inmeridiano magnetico mobilis, in nulla alia obliquitate quieſcere poſſet, praeter eam quae aequalis eſt verae inclinationi magneticae. Prius quod attinet; aberrationes ſitus centri grauitatis ab axe acus tantillae, vt vel dexterrimo artifici ineuitabiles ſint, iam efficere poſſunt, vt acus vi magnetica imbuta et ſuper fulcro in meridiano magnetico mobilis, in obliquitate quieſcat a vera inclinatione magnetica notabiliter diſcrepante. Altera vero conditio, nempe centri grauitatis in eodem loco perſeuerantia, rigoroſo ſenſu ne poſſibilis quidem eſt, cum omnis acus in ſitu horizontali poſita proprio ſuo pondere incuruetur, haecque inflexio in variis acus obliquitatibus varia ſit. Puto tamen errorem obſeruationum ex poſteriori hoc acus defectu oriundum, minuendo acus longitudinem, fieri inſenſibilem; quod vt appareat, vtamur experimento Ill. *Dan. Bernoullii*. quo inuenit, virgam ferream homogeneam cylindricam, diametri 4 lin et 4 pedes longam, ex centro ſuo grauitatis horizontaliter ſuſpenſam ita incuruari, vt centrum eius grauitatis $\frac{8}{25}$ mis partibus lineae infra ſitum, quem, ſi virga foret inflexilis, haberet, deprimatur; quae centri grauitatis depreſſiones cum ſint in virgis ſola longitudine diuerſis biquadrato longitudinum proportionales: ſequitur, in tali virga 16 pollices longa adeoque acus hic deſcriptae longitudinem habente non niſi partem $\frac{1}{2500}$ mam lineae aequare, quae adeo quantitas pro ſitu acus horizontali computata, in obliquis acus poſitionibus in ratione coſinus obliquitatis imminuitur adeoque in regionibus, vbi vera inclinatio magnetica notabilis eſt prorſus negligi poteſt. Reſtat ergo prior potiſſimum acus inclinatoriae imperfectio, poſteriori

tae alterutri lateri annulus orichalceus A B C D diametri quatuor circiter pollicum, exacte graduatus, ita affigitur, vt planum eius ad axem acus normale ſit, atque graduationis eius centrum O in ipſum acus axem; initium vero infra id centrum in lineam O A longitudini acus in centro iſto perpendicularem cadat. Acus hoc apparatu inſtructa, denuo ſuper fulcro inclinatorio ita aequilibretur, limam annulo, non acui, applicando, vt commune centrum grauitatis acus et annuli quam proxime ad acus axem reducatur. Tab. IV. Fig. 1.

V. Acu cum annulo iunctim, ita aequilibrata, iungatur annulo index orichalceus O I, circa axem acus leuiuſcula cum frictione verſatilis, cuius pondus partem circiter ſexageſimam ſummae ponderum acus et annuli adaequet. Acus, annulo et indice inſtructa, et hactenus omnis vis magneticae expers ſeruata, imponatur fulcro inclinatorio, ita, vt axis acus ad planum limbi ſemicircularis graduati ſit normalis et centro graduationis exacte reſpondeat. Acus hoc modo ſuſpenſae obſeruentur in limbo graduato obliquitates pro ſingulis indicis ſuper annulo poſitionibus; hincque tabula conſtruatur, quam in ſequentibus cum Ill. *Bernoullio* tabulam aequationis vocabimus. (g)

VI.

riori longe notabilior et artifici dexterrimo vix euitabilis; atque huius praeciſe defectus in verae inclinationis magneticae obſeruationem influxui ingenioſiſſime occurrit Ill. *Bernoullius* apparatu ſimplici qui in hoc articulo iam porro deſcribitur.

(g) Si acus, iunctim cum annulo foret perfecte aequilibrata, id eſt,

VI. Imbuatur nunc acus valida vi magnetica, quod ita fieri hic ſuppono, vt acus extremitas B, diviſionis annuli gradui nonageſimo reſpondens, polus euadat *borealis*; altera M *meridionalis*; atque hac vltima operatione tota acus inclinatoriae conſtructio erit abſoluta. (*h*)

§. 3.

ſi centrum commune grauitatis acus et annuli ad centrum axis foret reductum: angulus poſitionis indicis ſemper reſpondenti acus obliquitati foret aequalis (vid. nota *** §. 3); vnde hoc in caſu conſtructio tabulae aequationis foret ſuperfiua; atque hoc ipſo indicio gradus praeciſionis in acu, iunctim cum annulo, aequilibranda obtentus diiudicari poteſt.

(*h*) Communiter tales acus vi magnetica imbuuntur, ſtringendo eas alterutro magnetis polo per totam longitudiuem vbi quidem ea acus extremitas, in qua affrictus incipit, polo magnetis ſtringenti homologum, altera vero contrarium magnetiſmum adipiſcitur. Cum vero haec methodus non ſolum non admodum efficax, ſed etiam, praeſertim in chalybe indurato, qualem hic adhiberi convenit, ad producendos in acu plures polos magneticos ſucceſſiuos valde prona ſit: eam in acubus inclinatoriis animandis adhiberi minime conuenit. Ad perfectam acus inclinatoriae magnetiſationem requiritur 1) vt vi magnetica ſit ſaturata 2) vt omnes, quas concepit, vires magneticae ad acum in debitum ſitum convertendam conſpirent neque aliae alias in hoc effectu impediant; requiritur ergo, vt vna pars dimidia acus non niſi borealem, altera vero non niſi auſtralem magnetismum poſſideat, id eſt, vt acus non niſi *unicum* centrum magneticum, idque praeciſe in axe ſuo poſitum, habeat. Huic ſcopo egregie ſatisfacit methodus magnetificandi duplicis contactus ſeu *Cantoniana*, quae eo abſoluitur, vt acui praeciſe in medio eius imponantur poli contrarii duorum magnetum artificialium verticalium, circiter vna linea interpoſito ligni fruſtulo a ſe remoti, hique tum alternis vicibus, eadem ſeruata diſtantia, mediocri ſed vniformi preſſione, ſuper acu prorſum atque retrorſum trahantur, ita tamen, vt neuter polorum vnquam vltra acus extremitatem promoueatur. Operatione hac aliquoties et

ſuper

§. 3. Fulcro igitur inclinatorio ſuper linea meridiana magnetica, ope acus nauticae cognita, ita diſpoſito, vt iſta linea per centrum et initium diuiſionis circularis

ſuper vtroque acus latere repetita, poli iterum praeciſe ad medium acus reducantur et tum horizontaliter et ad acus longitudinem normaliter ab a u auferantur. Hoc modo ea acus extremitas, quam polus borealis ſpectabat, auſtralem et vice verſa magnetismum adipiſcitur, et, quod praecipuum eſt, centrum magneticum exacte ad medium acus erit reductum. modo id obſervetur, vt dimidium acus vnum praeciſe totidem vicibus ſtringatur, ac alterum dimidium. conf. Aepini Tent. theoriae electricitatis et magnetismi §. 233. Patet vero, vt haec methodus acui adminiſtrari queat, opus eſſe, vt axis ex medio acus foramine, per quod transfixus eſt, eximi queat. vid. nota (d); et cum haec methodus ob expoſitam, ipſi peculiarem, eamque magni momenti praerogatiuam ceteris omnibus praeferenda ſit: acum ita inſtrui operae pretium eſt. Quodſi tamen acus ita non inſtructa ſit, vt axis eximi poſſit: licebit, etſi minori commodo, ea vti methodo, qua Cel. *Anglus*, *Knightius*, coram Societate regia Londinenſi, acum nauticam ope duarum magnetum artificialium 16 poll. longorum egregia vi magnetica imbuit, quae in *Anthéaumi* Diſſertatione de magnetibus artificialibus, anno 1758 ab Acad. praemio coronata ita deſcribitur: Ms. *Knight* ayant placé ſes deux barres en ligne directe, le pole Nord de l'une en contact avec le pole Sud de l'autre, il poſa l'aiguille deſſus enſorte, que ſon centre étoit ſur la ligne de contact des deux barres; (inter quas laminas noſtro caſu axis acus interponi poteſt) puis appuyant ſur le centre de l'aiguille, il tira les barres de chaque coté les faiſſant gliſſer ſous l'aiguille; vbi quidem ea acus pars dimidia, quae polo boreali ſtringitur, auſtralem et vice verſa magnetismum adipiſcitur. Ceterum ope limaturae ferri acui per cribrum circumſtratae examinari poteſt, vtrum acus non niſi vnicum centrum magneticum idque praeciſe ad axem reductum, poſſideat, nec ne? Simili quoque examine dignoſcetur, num bini acus poli magnetici praeciſe cum binis eius acuminibus, vti opus eſt, coincidant, adeoque axis acus longitudinalis cum diametro eius magnetica idem ſit.

M N in plano K L deſcriptae tranſeat: limbus graduatus P Q R ſuper hoc plano circa axem cylindri verticalem verſatilis pro lubitu vel ad meridianum magneticum vel ad aliud quodcunque planum dato angulo ab eo declinans, id eſt, ad quodcunque azimutum magneticum reduci poterit. Ponamus igitur, hunc limbum in plano verticali conſtitui, quod a plano meridiani magnetici declinet angulo $= \omega$; et indicem annuli poſitum eſſe ad angulum A O I $= \eta$. Sit indicis huius pondus $= M$, eiusque centrum grauitatis in k, cuius ponatur ab axe O diſtantia $Ok = d$. Sit porro acus et annuli iunctim pondus $= A$, eorumque commune centrum grauitatis in G, huius ponatur ab axe O diſtantia $OG = g$ et angulus $AOG = \gamma$. Hiſce notatis imponatur haec acus magnetica, ab omni
Fig. 2. proximitate ferri remota, modo ante praeſcripto (V) cylindrulis vitreis, ac ponatur obliquitas, in qua acus ſe ad quietem componet, ſeu angulus $POB = \vartheta$, vbi nunc conditiones pro ſtatu hoc aequilibrii acus neceſſarias definire oportet. Elegantiſſime quidem hanc quaeſtionem iam reſoluit Cel. *I. A. Eulerus* in diſſertatione Actorum Acad. Berol. Tom. XI inſerta (*); cum tamen Vir celeberrimus ibi legem quandam magnetismi hypotheticam et ipſo experimentorum acu inclinatoria inſtitutorum cum theoria iſti legi ſuperſtructa conſenſu demum confirmandam aſſumſerit, totamque quaeſtionem ad doctrinam ſphaericam reduxerit: non erit alienum hic oſtendere, quomodo eadem quaeſtionis reſolutio ex poſtea cognitis certis et indubitatis magnetismi legibus plana methodo repetenda ſit. Cum

(*) Theorie de l'inclinaiſon de l'aiguille magnetique confirmée par des experiences par Mr. *J. A. Euler.*

Cum igitur ducta verticali O H ob angulum $AOH = POB = \vartheta$ et $GOH = \gamma + \vartheta$, ſtatim pateat, ex pondere A in puncto G collecto oriri vim, cuius momentum $= Ag.\,\text{ſin.}(\gamma + \vartheta)$, quae ad acum circa axem O conuertendam cuſpidemque B eleuandam tendit; ſimiliter ob $HOI = \eta - \vartheta$, ex pondere M in k collecto oriri vim, cuius momentum $= Md.\,\text{ſin}\,(\eta - \vartheta)$ quae pariter ad acum circa axem O conuertendam, ſed cuſpidem B deprimendam tendit; id vnum ſupereſt, vt tertiae vis, qua acus ſollicitatur, vis nimirum magneticae momentum ad acum conuertendam inueſtigetur. Sit hunc in finem vis magnetica in acum libere mobilem et in azimuto magnetico $= \omega$ conſtitutam agens $= W$; et P O F illa obliquitas, ad quam haec vis acum in iſto plano reducere conatur; id eſt, W denotet talem vim, quae acus polo boreali B ſub dicto angulo applicata aequipollet vi mediae inter omnes ſollicitationes, quas nucleus terrae magneticus in acum exſerit. Simili ſignificatione ſit vis magnetica in acum in ipſo meridiano magnetico conſtitutam agens $= V$ et illa obliquitas, ad quam haec vis acum in hoc plano reducere conatur, ſeu vera inclinatio magnetica $= \alpha$. Exprimatur iam vis W per lineam B S ipſi O F parallelam, eritque poſito $POF = u$ et $OB = k$, ob angulum $BOF = u - \vartheta$, huius vis momentum $= Wk\,\text{ſin.}\,(u - \vartheta)$ ad acum circa axem conuertendam et cuſpidem B deprimendam tendentis. Conſtat vero ex ipſa theoria magnetica (**), eſſe tang. $u = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\omega}$ et $W\,\text{ſin.}\,u = V\,\text{ſin.}\,\alpha$; vnde ob

$$\text{ſin.}\,u = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{(\text{tang.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\omega^2)}} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,u = \frac{\text{coſ.}\,\omega}{\sqrt{(\text{tang.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\omega^2)}},$$

 colli-

(**) Conf. Ill. *Aepini* tentamen theoriae electricitatis et magnetiſmi, §. 314 et ſeqq.

colligitur

$$\text{ſin.}\,(u - \vartheta) = \frac{\text{tang.}\,\alpha.\,\text{coſ.}\,\vartheta - \text{coſ.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\vartheta}{\sqrt{(\text{tang.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\omega^2)}} \text{ et}$$

$$W = V\,\text{coſ.}\,\alpha\,\sqrt{(\text{tang.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\omega^2)},$$

quibus valoribus ſubſtitutis, erit vis magneticae in acum agentis momentum $= Vk(\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\vartheta - \text{coſ.}\,\alpha.\,\text{ſin.}\,\vartheta.\,\text{coſ.}\,\omega)$ vnde, ob momentorum ex vtraque parte aequalitatem, pro ſtatu aequilibrii acus erit

$$A\,g.\text{ſin.}(\gamma+\vartheta) = M\,d\,\text{ſin.}(\eta-\vartheta) + V\,k\,(\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\vartheta - \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\vartheta\,\text{coſ.}\,\omega)$$

hincque

$$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{M\,d\,\text{ſin.}\,\eta - A\,g\,\text{ſin.}\,\gamma + V\,k\,\text{ſin.}\,\alpha}{M\,d\,\text{coſ.}\,\eta + A\,g.\,\text{coſ.}\,\gamma + V\,k\,\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\omega}$$

quae formula cum *Euleriana* eadem eſt. (***)

§. 4. Aequatio pro ſtatu aequilibrii acus modo inuenta

$$A\,g.\text{ſin.}(\gamma+\vartheta) = M\,d.\text{ſin.}(\eta-\vartheta) + Vk\,(\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\vartheta - \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\vartheta\,\text{coſ.}\,\omega)$$

ſtatim tres methodos notatu dignas ſuppeditat, ope acus inclinatoriae modo deſcriptae veram definiendi inclinationem magneticam, abſque eo, vt centrum grauitatis acus cum axe coincidere, ſiue etiam eius ab hoc aberrationem noſſe oporteat. Acu enim in azimuto magnetico quocunque $= \omega$ conſtituta, patet, ſi fuerit $\text{tang.}\,\vartheta = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\omega}$, terminum littera V affectum euaneſcere, adeoque ipſam hanc acus obliquitatem, qualescunque etiam vi acus magneticae variationes inducantur, ſemper tamen eidem indicis poſitioni reſpondere et vice verſa eam acus obliquitatem, quae,

(***) Hinc igitur patet, ſi fuerit $V = 0$ et $g = 0$; id eſt, ſi acus fuerit omnis vis magneticae expers et perfecte aequilibrata; fore $\vartheta = \eta$, vti ſupra diximus in nota *g*.

quae, vi acus magnetica quomodocunque variata, eidem tamen ſemper indicis poſitioni reſpondet, eſſe $=$ Arc.tang. $\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\omega}$; qua igitur acus obliquitate, quae ſe ab omnibus reliquis eſſentiali hoc charactere diſtinguit, experimentorum ope cognita et poſita $= \Phi$, innoteſcet inde vera inclinatio magnetica $= \alpha$; cum, ob ω ſeu azimutum magneticum cognitum, ſit tang. $\alpha =$ tang. Φ. coſ. ω; adeoque, ſi experimenta acu in meridiano magnetico conſtituta facta fuerint, ob $\omega = 0$ habebitur $\Phi = \alpha$.

§. 5. Tres autem variationes huic ſcopo idoneae vi magneticae acus inferri poſſunt: poteſt enim iſta vis 1) aut deſtrui atque iterum excitari 2) aut debilitari atque intendi 3) aut excitari atque inuerti, ita, vt ea acus extremitas, quae boreali magnetismo fuerat imbuta, iam auſtralem et vice verſa adipiſcatur, vnde tres reſultant methodi ſequentes:

I. *Acu omnis adhuc vis magneticae experte vel ea penitus orbata: pro ſingulis indicis poſitionibus obſeruentur reſpondentes acus obliquitates. Acu deinceps valida vi magnetica imbuta, et in meridiano magnetico conſtituta: eaedem obſeruationes repetantur; atque ea acus obliquitas, quae vtroque caſu eidem indicis poſitioni reſpondet, vera erit inclinatio magnetica.*

Methodus haec, ab Ill. *Bernoullio* commendata, hac inſigni praerogatiua gaudet, quod tabula aequationis, (§. 2. V) pro acu omnis plane magnetismi experte ſemel conſtructa, deinceps conſtanter pro quouis tempore et loco, ſi ſcilicet pro omnibus et ſingulis gradibus poſitionis indicis fuerit conſtructa, valeat, qualescunque ipſa inclinatio

ma-

magnetica vel varietates in diuerſis locis vel mutationes ſucceſſu temporis ſubierit; modo id certum ſit, acum rudiori quadam tractatione ſitum centri grauitatis ſuae non mutaſſe. Sed eadem methodus hac inſigni quoque difficultate premitur, quod propemodum impoſſibile ſit, acum omnis plane vis magneticae expertem habere et quod, ſi acus, dum tabula aequationis conſtruitur, iam fuerit vel leuiſſimo magnetismo imbuta, haec methodus principali ſua vtilitate excidat, propterea quod ea tabula iam non valet, niſi quamdiu non ſolum ſitus centri grauitatis acus, ſed ipſa quoque inclinatio magnetica nullam variationem ſubierit; adeoque toties de nouo conſtrui debet, quoties inclinationis magneticae vel differentias in diuerſis locis vel variationes diuerſis temporibus explorare velis. Quam exigua autem ſpes ſit, acum vnquam omnis magnetismi expertem haberi, vel inde perſpicitur, quod, ſi acus, ignita et in eo ſitu, quo magnetismus terreſtris ipſi nullam vim magneticam inducit (*), refrigerata vel maxime omnem vim magneticam perdidiſſet; tamen, cum pro conſtruenda tabula aequationis tempus ſatis notabile inclinata teneri debeat, ſi vel maxime in ipſo *aequatore* magnetico fuerit conſtituta (**), ab actione magnetismi terreſtris vim aliquam magneticam ſponte ſit conceptura, eamque ceteris paribus eo maiorem, quo maior eſt ipſa inclinatio magnetica.

II^{ta} methodus: Acu valide magnetica et in meridiano magnetico conſtituta conſtruatur tabula aequationis: tumque vi

(*) In ſitu ſcilicet ad inclinationem magneticam normali.

(**) In quo ſcilicet plano actio magnetismi terreſtris in acum, ceteris paribus, omnium minima eſt, atque adeo nulla, ſi acus in ſitu horizontali detineatur.

vi acus notabiliter imminuta, eaedem obſeruationes repetantur vel vice verſa: atque ea acus obliquitas, quae vtroque caſu eidem reſpondet indicis poſitioni, vera erit inclinatio magnetica.

III^{tia} methodus: *Acu valide magnetica et in meridiano magnetico conſtituta, conſtruatur tabula aequationis: tum inuertatur magnetismus, et acu eodem, ac ante, modo in meridiano magnetico conſtituta, vt ſcilicet eadem, quae ante, eius extremitas, iam auſtralis, verſus Boream ſpectet, eaedem obſeruationes repetantur; atque ea acus obliquitas, quae vtroque caſu eidem reſpondet indicis poſitioni, vera erit inclinatio magnetica.*

Methodum ſecundam iam adhibuit Cel. *Malletus* (vid. Nov. Comm. T. XIV. Pars II. p. 38); tertiae vero nullibi mentionem fieri memini; licet ſecundae praeferenda ſit, propterea quod imminuta vi magnetica, ceteris paribus etiam intenſitas tendentiae acus ad iuſtam ſuam obliquitatem et ad ſuperanda frictionis, ſi qua ſit, obſtacula imminuatur, cum contra in tertia methodo vis magnetica vtroque caſu quantumuis valida eſſe poſſit. Licet vero, vbicunque inclinatio magnetica iam aliquatenus cognita eſt, tabulam aequationis pro mediocri poſitionum indicis interuallo, inter cuius limites inclinatio magnetica cadit, conſtruxiſſe ſufficiat; tamen iſta conſtructio et operoſa eſt, ſi praeciſam eam eſſe velis, et incerta, tam ob graduationis, obliquitatem acus menſurantis, paruitatem (conf. nota *a*), quam etiam ob id, quod errores toti, quanti quanti ſunt, inclinationis magneticae determinationem inde deductam afficiant; vnde hiſce methodis ſequentem, in quam incidi, commodiſſime ſubſtitui poſſe puto.

I. Acu valide magnetica et in meridiano magnetico conſtituta pro duabus quibuscunque indicis poſitionibus $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ obſeruentur reſpondentes acus obliquitates $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Cum igitur ob $\omega = 0$ et

poſito $\frac{A g}{M d} = m$ et $\frac{V k}{M d} = n$; ſit

$$\text{tang.}\, \vartheta = \frac{\text{ſin.}\, \eta - m\, \text{ſin.}\, \gamma + n\, \text{ſin.}\, \alpha}{\text{coſ.}\, \eta + m\, \text{coſ.}\, \gamma + n.\, \text{coſ.}\, \alpha},$$

erit poſito $- m\, \text{ſin.}\, \gamma + n\, \text{ſin.}\, \alpha = P$ et

$$m\, \text{coſ.}\, \gamma + n\, \text{coſ.}\, \alpha = Q$$

$$\text{tang.}\, \mathfrak{A} = \frac{\text{ſin.}\, \mathfrak{a} + P}{\text{coſ.}\, \mathfrak{a} + Q} \text{ et tang.}\, \mathfrak{B} = \frac{\text{ſin.}\, \mathfrak{b} + P}{\text{coſ.}\, \mathfrak{b} + Q}:$$

ex quibus duabus aequationibus valores P et Q definire licet; quibus inuentis habebitur

$$\text{ſin.}\, (\eta - \vartheta) = Q\, \text{ſin.}\, \vartheta - P.\, \text{coſ.}\, \vartheta. \quad (\S.\ 4.)$$

II. Vi acus magnetica notabiliter debilitata, pro duabus quibuscunque indicis poſitionibus $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}'$ obſeruentur reſpondentes acus obliquitates $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$; atque inde colligantur valores $- m\, \text{ſin.}\, \gamma + n'\, \text{ſin.}\, \alpha = P'$ et $m\, \text{coſ.}\, \gamma + n'\, \text{coſ.}\, \alpha = Q'$; quibus inuentis iterum pro tali acus ſtatu magnetico generaliter habebitur $\text{ſin.}\, (\eta - \vartheta) = Q'\, \text{ſin.}\, \vartheta - P'\, \text{coſ.}\, \vartheta$.

III. Denique, ſi eousque procedere velis, inuerſo acus magnetismo, ex obſeruatis acus obliquitatibus $\mathfrak{A}''$ et $\mathfrak{B}''$ binis indicis poſitionibus quibuscunque $\mathfrak{a}''$ et $\mathfrak{b}''$ reſpondentibus colligantur valores

$$- m\, \text{ſin.}\, \gamma + n''\, \text{ſin.}\, \alpha = P''$$

$$\text{et } m\, \text{coſ.}\, \gamma + n''\, \text{coſ.}\, \alpha = Q''$$

quibus inuentis pro tali acus ſtatu magnetico generaliter erit $\text{ſin.}\, (\eta - \vartheta) = Q''\, \text{ſin.}\, \vartheta - P''\, \text{coſ.}\, \vartheta$.

Cum

Cum igitur caſu $\vartheta = \alpha$, in omnibus hiſce tribus caſibus ſin. $(\eta - \vartheta)$ vnum eundemque valorem habeat (§. 4.): patet, fore

$$\text{I)}\quad Q\,\text{ſin.}\,\alpha - P\,\text{coſ.}\,\alpha = Q'\,\text{ſin.}\,\alpha - P'\,\text{coſ.}\,\alpha.$$

$$\text{II)}\quad Q'\,\text{ſin.}\,\alpha - P'\,\text{coſ.}\,\alpha = Q''\,\text{ſin.}\,\alpha - P''\,\text{coſ.}\,\alpha.$$

$$\text{III)}\quad Q\,\text{ſin.}\,\alpha - P\,\text{coſ.}\,\alpha = Q''\,\text{ſin.}\,\alpha - P''\,\text{coſ.}\,\alpha;$$

ex quibus aequationibus pro determinanda vera inclinatione magnetica concluditur.

$$\text{I.}\quad \text{tang.}\,\alpha = \frac{P - P'}{Q - Q'}.$$

$$\text{II.}\quad \text{tang}\,\alpha = \frac{P' - P''}{Q' - Q''}.$$

$$\text{III.}\quad \text{tang.}\,\alpha = \frac{P - P''}{Q - Q''}.$$

quam methodum iam ſequenti exemplo illuſtrabimus.

§. 6. Menſe Nouembri anni 1778 acu inclinatoria *Bernoulliana* in ipſo meridiano magnetico omni, qua potui, cura ſequentes obſeruationes inſtitui:

1.) Acu valide magnetica

$$\eta = 0^\circ;\ \vartheta = 19^\circ\ 15' = \mathfrak{A}$$

$$\eta = 180^\circ;\ \vartheta = 156^\circ\ 30' = \mathfrak{B}$$

hinc cum ſit

$$\text{tang.}\,\mathfrak{A} = \frac{P}{1 + Q}\ \text{et}\ \text{tang.}\,\mathfrak{B} = \frac{P}{-1 + Q},$$

colligitur

$$P = \frac{2\,\text{ſin.}\,\mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,\mathfrak{B}}{\text{ſin.}\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 0,38734\ \text{et}$$

$$Q = \frac{\text{ſin.}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{A})}{\text{ſin.}\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 0,10917.$$

2.) Acus vi magnetica notabiliter imminuta

$$\eta = 0^\circ;\ \vartheta = 6^\circ\ 0' = \mathfrak{A}'$$

$$\eta = 180^\circ;\ \vartheta = 173^\circ\ 45' = \mathfrak{B}'$$

 vnde

vnde ſimili modo colligitur

$$P' = 0,10726 \text{ et } Q' = 0,02056.$$

3.) Magnetiſmo acus inuerſo

$$\eta = 0°;\ \vartheta = -19° 10' = \mathfrak{A}''$$
$$\eta = 180°;\ \vartheta = 195° 35' = \mathfrak{B}''$$

hinque

$$P'' = -0,30947 \text{ et } Q'' = -0,10965,$$

ex quibus iam valoribus concluditur

$$\text{I. tang. } \alpha = \frac{P - P'}{Q - Q'} = 3,1608;\ \alpha = 72° 26'.$$
$$\text{II. tang. } \alpha = \frac{P' - P''}{Q' - Q''} = 3,2004;\ \alpha = 72° 38'$$
$$\text{III. tang. } \alpha = \frac{P - P''}{Q - Q''} = 3,1844;\ \alpha = 72° 34'$$

quae determinationes licet propemodum quarta gradus parte adhuc inter ſe diſcrepent: maior tamen conſenſus ſperari non poteſt, quam diu in ipſis obſeruationibus obliquitatum acus vltra praeciſionem totidem minutorum certi eſſe non poſſumus, cui defectui aliter occurri poſſe non videtur, niſi applicando acui inclinatoriae diuiſionem Nonnianam, aut diviſioni limbi lineas transuerſales, in diuiſionibus quadrantum aſtronomicorum cognitas. Quo tamen de methodi huius gradu praeciſionis melius iudicari queat: eodem tempore inclinationem magneticam etiam ea methodo determinaui, quam in diſſertatione ſupra allegata Cel. *Eulerus* commendat, et qua etiam alias vſus ſum (conf. Nou. Comm. T. XIX. p. 543). In hac methodo praeter ſuperiores obſeruationes in auxilium adhuc vocanda eſt tertia, quae acu ſuper meridiano magnetico conuerſa inſtituitur. Obſeruationes igitur ſunt ſequentes:

Acu

	Acu valide magnetica.	Magnetiſmo inuerſo.
$\omega = 0°;\ \eta = 0°$	$\vartheta = 19°\,15' = \mathfrak{A}$	$\vartheta = -19°\,10' = \mathfrak{A}''$
$\omega = 0°;\ \eta = 180°$	$\vartheta = 156°\,30' = \mathfrak{B}$	$\vartheta = 195°\,35' = \mathfrak{B}''$
$\omega = 180°;\ \eta = 0°$	$\vartheta = 24°\,10' = \mathfrak{C}$	$\vartheta = -16°\,0' = \mathfrak{C}''$

Cum igitur poſito

$$m \operatorname{coſ.} \gamma - n \operatorname{coſ.} \alpha = R \text{ et } m \operatorname{coſ.} \gamma - n'' \operatorname{coſ.} \alpha = R''$$

ob $\omega = 180°$ habeatur

$$\operatorname{tang.} \mathfrak{C} = \frac{P}{1 + R} \text{ et } \operatorname{tang.} \mathfrak{C}'' = \frac{P}{1 + R''},$$

hinc ob $P = 0,38734$, concluditur

$$R = -0,13591 \text{ et } R'' = 0,07711, \text{ vnde ob}$$

$$m \operatorname{coſ.} \gamma + n \operatorname{coſ.} \alpha = Q = 0,10917 \text{ et}$$

$$m \operatorname{coſ.} \gamma + n'' \operatorname{coſ.} \alpha = Q'' = -0,10965$$

habetur

$$m \operatorname{coſ.} \gamma = \frac{Q + R}{2} = -0,01337,$$

atque pro ſtatu magnetiſmi inuerſi

$$m \operatorname{coſ.} \gamma = \frac{Q'' + R''}{2} = -0,01627;$$

qui duo valores cum iidem prodire debuiſſent: ſumto medio ſtatuamus $m \operatorname{coſ.} \gamma = -0,01482$; adeoque $m = -\frac{0,01482}{\operatorname{coſ.} \gamma}$.
Simili modo erit

$$n \operatorname{coſ.} \alpha = \frac{Q - R}{2} = 0,12254 \text{ et}$$

$$n'' \operatorname{coſ.} \alpha = \frac{Q'' - R''}{2} = -0,09338; \text{ adeoque}$$

$$n = \frac{0,12254}{\operatorname{coſ.} \alpha} \text{ et } n'' = -\frac{0,09338}{\operatorname{coſ.} \alpha},$$

quibus valoribus in aequationibus

$$-m \text{ ſin. } \gamma + n \text{ ſin. } \alpha = P = 0,38734 \text{ et}$$

$$-m \text{ ſin. } \gamma + n'' \text{ ſin. } \alpha = P' = -0,30947$$

ſubſtitutis habetur

$$0,01482 \text{ tang. } \gamma + 0,12254 \text{ tang. } \alpha = 0,38734 \text{ et}$$

$$0,01482 \text{ tang. } \gamma - 0,09338. \text{ tang. } \alpha = -0,30947$$

vnde concluditur tang. $\alpha = 3,2272$ adeoque $\alpha = 72° 47'$. Vnde ſumto inter omnes determinationes praecedentes medio habetur Petropoli exeunte anno 1778 vera inclinatio magnetica 72° 36′. Ceterum comparando vtramque methodum patet, priorem, quam hic expoſui, ſub pari praeciſionis gradu prae altera id commodi habere, quod omnes obſeruationes in ea neceſſariae in meridiano magnetico inſtituantur, neque, vt in altera, opus ſit, acum a ſitu ſuo quoad azimutum dimoueri; quo accedit, vt, annotante ipſo Cel. *Eulero* (diſſ. alleg. §. 62) methodus ab ipſo propoſita adhiberi non poſſit, ſi angulus γ fuerit $= 90°$, cum ea, quam hic expoſui, vniuerſaliter ſuccedat, qualemcunque demum valorem iſte angulus habuerit.

§. 7. Licet hiſce methodis vera inclinatio magnetica exacte definiri poſſit absque eo, vt centrum grauitatis acus cum eius axe coincidere neceſſe ſit: tamen euidens eſt, non ſolum acum eo fore perfectiorem, ſed etiam aliis inclinationis magneticae phaenomenis detegendis aptiorem, quo propius centrum eius grauitatis ad eius axem reducere liceat; id, quod ſequente ſimplici apparatu acui adiungendo effici poſſe puto. Super dorſo ſuperiori acus circa eius medium figantur duae laminulae

Fig. 3. orichalceae A et B, foraminibus cochleatis pertuſae, per quae transeat filum orichalceum axi acus longitudinali paral-

parallelum C D vtrinque in capitula graſſiora C et D terminatum; cuius igitur motu centrum grauitatis acus in directione, acus longitudini paralela, vel dextrorſum vel ſiniſtrorſum promoueri poterit. In vtroque porro acus dorſo praeciſe ſupra et infra axem infigantur acui tenues cochleae orichalceae itidem capitulis grauiuſculis inſtructae E et F, ad acus longitudinem normales, quarum ope centrum grauitatis eius attolli vel deprimi poterit. (*)

Quodſi iam inclinatio magnetica ſuperioribus methodis omni, qua fieri poteſt, praeciſione fuerit definita: dematur index orichalceus, O I (fig. 1.) et cochlearum modo deſcriptarum combinato auxilio effici poterit, vt acus inclinatoria 1) in meridiano magnetico ipſam illam inclinationem modo inuentam indicet et 2) in plano ad meridianum magneticum normali ſiue aequatore magnetico conſtituta ſitum perfecte verticalem teneat; quod ſi fuerit obtentum; certum eſt, centrum grauitatis acus exactiſſime ad axem eſſe reductum; cum enim index orichalceus demtus ſit, erit $M = 0$; (§. 3) et cum acus in meridiano magnetico veram indicet inclinationem magneticam, ob $\omega = 0$ erit

$$\text{tang. } \alpha = \frac{- A\,g\,\text{ſin. } \gamma + V\,k\,\text{ſin. } a}{A\,g\,\text{coſ. } \gamma + V\,k\,\text{coſ. } \alpha}$$

vnde concluditur $A\,g\,\text{ſin. } (\alpha + \gamma) = 0$. Cum porro acus in aequatore magnetico adeoque caſu $\omega = 90°$ ſitum teneat verticalem, erit

$$\frac{- A\,g\,\text{ſin. } \gamma + V\,k\,\text{ſin. } \alpha}{A\,g.\,\text{coſ. } \gamma} = \text{tang. } 90° = \infty$$

adeoque $A\,g.\,\text{coſ. } \gamma = 0$; quae duae aequationes

A g.

(*) Similem apparatum etiam ab Ill. *L. Eulero*, ſed alium in finem, fuiſſe propoſitum, videre licet in eius diſſ. de obſeruatione inclinationis magn. pag. 93.

$$A\,g.\,\text{coſ.}\,\gamma = 0 \text{ et } A\,g.\,\text{ſin.}\,(\alpha + \gamma) = 0$$

locum aliter habere non poſſunt, niſi fuerit $g = 0$, ſiue centri grauitatis acus ab eius axe diſtantia nulla; id quod etiam inde dignoſci poterit, ſi in quouis azimuto magnetico ω obliquitas acus $= u$ talis fuerit, vt ſit tang. $u = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\omega}$. Si, hoc obtento, indicem orichalceum reponi placeat, generaliter erit

$$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{M\,d\,\text{ſin.}\,\eta + V\,k\,\text{ſin.}\,\alpha}{M\,a\,\text{coſ.}\,\eta + V\,k\,\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\omega}$$

adeoque in ipſo meridiano magnetico ea acus obliquitas, quae reſpondenti ſuae indicis poſitioni aequalis eſt, vera erit inclinatio magnetica.

Ceterum acus inclinatoria, ad hunc perfectionis gradum euecta, ad obſeruandas, ſi quae ſint, inclinationis magneticae variationes diurnas vel menſtruas, vel ab electricitate atmoſphaerae aurorisue borealibus atque aliis circumſtantiis phyſicis pendentes demum idonea videtur.

NOVUM

NOVUM HYGROMETRI GENUS DESCRIPTUM

Auctore

P. INOCHODZOW.

Refractionem terreſtrem, in Libellatione locorum ſummopere neceſſariam, diuerſis eiusdem diei horis notabiliter variari; atque hanc variationem non vnice a calore et preſſione aëris, ſed partim a diuerſo Solis ſitu reſpectu obiecti, cuius altitudo metitur, et maxime a diuerſa quantitate vaporum, in aëre natantium pendere, multae eaeque indubiae docent obſeruationes. Aër enim inferior fit vel humidior vel ſiccior, altitudine Barometri ſaepe inuariata: Mane ac veſperi copioſiores plerumque vapores haerere circa horizontem ſuſpenſos, vnde et refractionem radiorum maiorem eſſe experientia teſtatur. Optandum igitur eſt, vt obſeruationibus Thermometricis ac Barometricis aſſocientur etiam Hygrometricae, quibus incrementa et decrementa aërei humoris menſurari, atque in calculum refractionis introduci poſſint.

Conſtruendis Hygrometris materiam praebent omnia corpora, quae humore ex aëre recepto mutationem aut in magnitudine, aut in contorſione et reuolutione, aut deni-

que in pondere ſubeunt. Innumera ſunt eiusmodi corpora, vti ſalia omnis generis, oleum vitrioli, charta, pergamenum, corium ouillum, funes cannabini, chordae ex inteſtinis animalium contortae, ſpongia, cotoneum, lana, asſerculi abietini, ſpica ariſtae etc., ex quibus diuerſimode confici ſolent Hygrometra. Aſt magna adhuc imperfectione laborant haec inſtrumenta, neque ſunt durabilia; ſed ſuccedente tempore effectu ſuo orbantur: quam ob rem obſeruationes poſteriores cum anterioribus comparari tuto nequeunt. Deeſt praeterea certa ac determinata menſura, ad quam ſtatus atmosphaerae, ſingulis fere momentis variabilis, referri poſſit: pleraque enim Hygrometra indicant gradus humiditatis pro arbitrio obſeruantis aſſumtos.

Omnes Hygrometrorum ſpecies, eorumque defectus ſigillatim exponere, noſtri non eſt propoſiti; ſed his modo ac figura diuerſis, nouum, nulli antea inuentorum (*) ſecundum, addere lubet; praeſertim cum hodie obſeruationum meteorologicarum frequens ſit vſus et magna conſideratio habeatur.

Dum in vrbe Dmitriewſk obſeruationibus aſtronomicis et Geodeticis vacaremus, inuenimus ibi in dextra Wolgae ripa, prope oſtium riui Camyſchenkae, lapidem ſciſſilem argillaceum in magna copia reperiundum, qui humorem euidenter recipit, eumque poſtea remittit, imo digitis ſudore humidis et praecipue linguae ſiccus adglutinatur. Inſtitutis cum hoc lapide experimentis, ponderando illum libra tenui, qua pharmacopolae vti ſolent, ſed ad com-

(*) Hygrometrum Dni. *de Luc* ex ſolo nomine tantum nobis notum.

commodiorem vſum a b. *Lowitzio* ſingulari modo conſtructa, didicimus lapidem memoratum exiſtente aëris humiditate ponderoſiorem, decreſcente vero illa leuiorem eſſe, atque adeo vice Hygrometri fungi poſſe.

Vt autem viciſſitudines atmosphaerae ad certam menſuram reuocentur, duos, prouti in Thermometris, terminos, maximae ſcilicet ſiccitatis et humiditatis, ſequentem in modum determinauimus.

Electa et noſtro vſui apta, dicti lapidis fruſta ſcindimus in laminas tenues, et conciliata illis figura circulari, terebamus vnum diſcum ſupra alterum, principio mediante arena ſcriptoria et aqua, denique ſola aqua vltimam inducebamus polituram; obſeruando vt eadem vbiuis, quousque licet maneat craſſities; quod machina huic ſcopo conuenienti facilius, citius et accuratius, quam nudis manibus, vti nos fecimus, obtineri poteſt.

Gradum humiditatis maximae reperimus detinendo lapidem, dicto modo praeparatum ſub aqua, donec ea plene ſaturetur; tum repetito ſaepius diuerſis temporibus experimento, lapidem ſemel aqua impraegnatum conſtans habere pondus, et rariſſime niſi vnico grano diſcrepare, deprehendimus. Tempus vero minimum, quo eiusmodi lapis plene ſaturatur, exacte determinare non licet; ab initio enim plus, deinde minus imbibit; ſufficit ſi per aliquot horas ſub aqua detineatur. Lapis ex aqua extractus, antequam librae applicetur, linteolo leniter abſtergendus eſt, vt ſuperflua tollatur aqua.

 Alte-

Alterum terminum, ſummae ſcilicet ſiccitatis, inuenimus exponendo lapidem igni ad decem circiter minuta prima, et eximendo illum forcipe ponderauimus excandeſcentem. Lapidem igni paulatim admouere neceſſum eſt; alias enim cum fragore diſrumpitur; et vt ponderatio cito abſoluatur, libra cum ſacomate aliquantum leuiori ſit ad manus. Hoc etiam experimentum bis et ter cum nonnullis lapidibus repetiimus, ac ſemper pondus lapidis non niſi vno, vel ſesqui grano, quem in igne perdit, minui deprehendimus.

Poſt candefactionem immerſimus iterum lapidem in aquam, vt denuo ſummum humiditatis gradum haberemus, atque obſeruauimus lapidem eandem prope quantitatem aquae recipere, ac ſi non eſſet ignitus, et non niſi vno, vel ſesqui grano, vt antea monuimus, differre.

Hoc modo notatis in vtroque experimento ponderibus lapidis ex igne et aqua poſtremum exemti, habetur certa menſura, ſeu ſcala, ad quam humorem in aëre latentem referre licet: Humiditas enim aëris definiri poteſt ex ratione denſitatis vaporum ad denſitatem aquae.

Sit pondus lapidis ex aqua extractum $= P$
et ex igne exemtum $= \pi$
pondus quodam tempore obſeruatum $= Q$
et humiditas aëris huic obſeruationi reſpondens $= H$
erit $H = \frac{Q - \pi}{P - \pi}$; vel ponendo $P - \pi = M$ erit

$$H = \frac{Q - \pi}{M} = \frac{1}{M} Q - \frac{\pi}{M};$$

vbi $\frac{1}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$ ſunt termini conſtantes. Sit porro pondus

eius-

eiusdem lapidis alio tempore obſeruatum $= q$, et humiditas pro hac obſeruatione $= h$

$$\text{erit } h = \frac{q-\pi}{M}, \text{ et}$$

$$H : h = Q - \pi : q - \pi : \text{ hoc eſt,}$$

humiditates ſunt vti exceſſus ponderum lapidis ſupra pondus eiusdem ex igne depromti.

Praeter indicatos terminos aſſignari poſſunt ex ipſis obſeruationibus duo alii, ſiccitatis nempe aeſtiuae et humiditatis autumnalis, vel hybernae, indeque media aëris conſtitutio concludi, quae etiam habetur in conclaui mediocriter tepefacto. His notatis adnecti poteſt ſcalae hygrometricae, prout in Barometris fieri ſolet, tabella, oſtendens variam coeli temperiem ſiccam et humidam.

Non acquieuimus primis tentaminibus in Dmitriewsk habitis, quorum annotationes iniuria temporis perierunt, reduces Petropolin adportauimus nobiscum nonnullos eiusmodi lapides rudes, cum quibus hic denuo experimenta inſtituimus, atque diuturnitate temporis rem comprobare voluimus. Operam inprimis dedimus, vt plures capiamus obſeruationes, ex quibus ſequentia deriuauimus.

1. Quo diſcus lapidis maior, eo melius aëris mutationes dignoſci poſſunt.

2. Quo tenuior, eo ad praeſtandum Hygrometrum aptior; ob craſſitiem enim minus ſenſibilis eſt, nec cito exſiccatur.

3. Lapides hos per quatuor annos mutationem non ſu-

ſubiiſſe; quod quolibet tempore, mergendo illos in aquam, et poſtea ponderando, experiri licet.

4. Vt diuerſa Hygrometra ſint concordantia, eandem exacte magnitudinem et craſſitiem habeant, ſimulque pondera ipſorum, a primo initio ex aqua extractorum, ſint aequalia neceſſe eſt; quod atterendo alterutrum lapidem ſupra tertium haud difficulter praeſtare licet. Non poſſumus tamen diffiteri, exiguam diſcrepantiam inter nonnullos hosce lapides deprehendi; dum ſcilicet ex igne eximuntur, non idem accurate pondus habere; ſed granis duobus vel tribus differre; quod ab imperfecta ipſorum aequalitate, et forſan ipſa denſitate prouenire, nullum eſt dubium. Nihilo minus effecimus duos lapides quorum vnus ex igne exemtus ponderabat 126, 5 grana, alter vero 126; ille aqua imbutus grauis erat 179 granorum et hic $178\frac{1}{2}$; ante candefactionem vero vterque 180 grana ponderabat. Inſtitutis per octo menſes quotidie obſeruationibus, differentia inter illos nunquam ſesqui granum ſuperabat. Quod ſi igitur machina idonea et manus exercitati artificis adhibeatur, eiusmodi Hygrometra concordantia confici poſſe non dubitamus.

5. Cum lapidibus diuerſae magnitudinis, ſed eiusdem pene craſſitiei, inſtituimus etiam obſeruationes, et reperimus omnes illos incrementa ac decrementa humiditatis ſimul indicare, et pondera humiditatem indicantia ſequi prope rationem diametrorum duplicatam. Hanc tamen Regulam non eſſe intelligen-

gendam in rigore mathematico ingenue fatemur; ob rationem enim ſupra allatam, cui addi poteſt, quod lapides diu expoſiti, (ſuſpenſique in arca, cuius fundus perforatus, vt aëri liber aditus pateat), ponderabantur vero in conclaui hyeme calefacto; hinc menſibus hybernis citius quam aeſtiuis anomaliae quaedam interdum obſeruatae ſunt. Huc etiam conferre aliquid poteſt attritus ipſius librae, ad ſuccinctam cuius deſcriptionem nunc accedimus, quoniam illa in capiendis his experimentis et obſeruationibus praecipuum conſtituit inſtrumentum.

Adhibuimus libram parmaceuticam, cuius ſcapum *a b* $3\frac{1}{2}$ pollicum Pariſinorum longum. Sepoſitis lancibus applicuimus illarum loco duos vncos orichalceos, quorum ex altero *a* ſuſpenditur lapis hygrometricus, ex altero vero *b* ſacoma *p*, proxime aequale ponderi lapidis ex igne exemti. Vt autem incrementa ac decrementa humiditatis facile et expedite habeantur, neque ponduſcula addere, aut demere et numerare opus ſit, quod longum et taedioſum ſane foret, extremitati brachii, de qua pendet ſacoma, adnexa eſt catenula *b e f* ex paruis, magnitudine et pondere aequalibus, fili argentei annulis confecta, cuius alterum extremum *e* affigitur ſuperiori parti aſſerculi A B, ſurſum ac deorſum apte mobilis in ſulco alius aſſerculi fixi E D, in quo ipſa libra ad clauum E *d* ſuſpenditur. Vncus in *a* aliquantum grauior fit vnco in *b*, vt iugum nondum oneratum ea ex parte deſcendat, et ad obtinendum ſitum horizontalem, aſſerculum A B eo vsque promoueatur, donec pars catenulae ſub *b* pendens, ſuppleat Tab. V. Fig. 1.

de-

defectum ponderis vnci *b*, et ſit aequilibrium. Hoc in ſtatu notentur in vtroque aſſerculo puncta, vel lineolae coincidentes *q*, *r*, vnde initium ſcalae ſumendum erit. Deinde vnco *a* applicetur ponduſculum 10 granorum, et agatur deorſum aſſerculum A B eo vsque, donec iterum deſcendente catenula aequilibrium reſtituatur; hoc in ſitu ducatur in aſſerculo mobili lineola *s*, reſpondens notae *q* in aſſerculo ſixo prius factae. Hoc modo obtinebitur in ſcala interuallum *r s* 10 granorum; quia vero annuli catenulae aequalis ponderis ſunt, diuidatur iſtud in 10 partes aequales, ſingula grana repraeſentantes, et continuata diuiſione per totam aſſerculi A B longitudinem adſcribantur ſurſum verſus numeri. Vel vnco *a* ſeorſim applicando ponduſcula, 20, 30, 40, 50 etc. granorum, notentur, vti dictum, interualla, et inter ſe comparentur; qua ratione examinare licebit, vtrum omnes catenulae annuli aequiponderantes ſint, an ſecus. Interuallum vndecim granorum diuidatur in 10 partes aequales, et hae transferantur in aſſerculum fixum C D, ad latus ſcalae, ſupra et infra notam *q* principio factam, numeri que deſuper apponantur. Hoc modo habebitur ſpecies ſic dicti Nonnii, et partes grani decimae, imo centeſimae aeſtimari poſſunt. Reliquum ex inſpectione figurae patet: Fig. 2. exhibet horizontalem ſectionem aſſerculorum, fixi *a b c d e f* et mobilis *b c d e f h i*, cuius pars extans *b c d e* ſulco prioris apte reſpondet. Vt ambo aſſercula arcte inter ſe cohaereant, applicatus eſt a tergo elater *k l m*.

Tab. V. Fig. 2.

Figura

Figura 3^{ia} repraeſentat libram, vt vocant, ocula- Tab. VI.
riam ex orichalco conſtructam: iugum *a b* 9¼ pollicum Pariſinorum longum; axis iugi ex chalybe indurato fabrefactus, cuius acies bene laeuigatae intrant in foramina trutinae conuenientia *o o* fig. 5. Ad minuendum vero attritum et ad maiorem motus facilitatem curauimus, vt iugum ipſum circa axem ſit etiam volubile. Ne vero excidat axis, aut ad alterutrum trutinae latus declinetur, cochleae *f f* ab vtraque parte acies axis capitulis ſuis tangunt. Lingula acuminata *c d* 5 pollicum longa, cui ſubiacet index *g h*. Extremitati iugi *a* applicatur lapis hygrometricus et cochlea firmatur; alteri extremitati *b* adnectitur catenula, et ex vnco ſuſpenditur ſacoma *p*. Reliqua cum priori deſcriptione congruunt, hoc ſolo diſcrimine, quod catenula non fixo, ſed ope cochleae *t* pauliſper mobili vnco *m* ſuſpenſa ſit; vt attolli deprimique poſſit, prout aequilibrium iugi et conuenientia initii ſcalae ac Nonnii poſtulat. Fig. 5. exhibet ſectionem librae verticalem per centrum eius tranſeuntem, vt partes ipſius a latere conſpiciantur. Quo catenula ſubtilior, eo ampliorem fore ſcalam per ſe patet: in ſcala huius librae interuallum 10 granorum occupat 2''. 10''',7, in ſcala vero prioris eidem interuallo reſpondent 4 pollices. Cum libra orichalcea, cui ante paucos dies vltima manus impoſita eſt, obſeruationes nondum fecimus; eiusque ſcalam et Nonnium etiam ex orichalco, mutationi non tam obnoxio, conficere in animo habemus.

Catenulam librae prius deſcriptae et dio per aeſtatem expoſitae, diebus calidiſſimis aliquantulum elongari exinde ſuſpicamur, quod adducta ſcala, quam interea im-

mutatam praeſupponimus, ad primam *Nonnii* notam, iugum absque Hygrometro et Sacomate inclinatur ex parte *b* (fig. 1.) infra ſitum horizontalem. Hinc nota eſt occaſio ſequens problema reſoluendi.

Dato exceſſu longitudinis catenulae a calore extenſae, inuenire incrementum ponderis; vel hoc cognito illum determinare?

Sit catenula A B D C extremitati iugi in C adnexa, et A B δ C eadem ab aeſtu Solis elongata; quia pars
Fig. 6. tantummodo C D vel C δ agit in iugum, reliqua A B D vel A B δ ab vnco ſuſtentatur: fingamus pondus catenulae A B D C vel A B δ C = P, longitudinem A B D C vocemus L et exceſſum longitudinis *l*; adeoque longitudo catenulae extenſae erit L + *l*, incrementum vero ponderis ſit $p =$ pond. C δ − pond. C D.

ABDC : P = CD · pond. CD	ABδC : P = Cδ : pond. Cδ
L : P = CD : pond. CD	L + *l* : P = Cδ : pond. Cδ
pond. $CD = \frac{P.\,CD}{L}$	pond. $C\delta = \frac{P.\,C\delta}{L + l}$

vnde

$$p = \frac{P.\,C\delta}{L + l} - \frac{P.\,CD}{L};\ \text{ſed}$$

$$CD = \frac{L - AB}{2} \text{ et } C\delta = \frac{L + l - AB}{2},\ \text{erit}$$

$$p = \frac{P}{L + l}\,\frac{(L + l - AB)}{2} - \frac{P}{L}\,\frac{(L - AB)}{2}$$

et facta reductione

$$p = \frac{\frac{1}{2} P\,l\,AB}{L\,(L + l)} \text{ atque } l = \frac{2\,L^2\,p}{P.\,AB - 2\,L\,p}.$$

In

In ſequenti tabella ſpeciminis loco offertur conſpectus obſeruationum Hygrometricarum annis 1777 et 1778 Petropoli habitarum; vbi maxima et minima humiditas earumque differentiae quot menſibus exhibentur. Ad illas faciendas vſi ſumus lapide, cuius diameter erat $3''.\ 6\frac{1}{2}''''$, craſſities vero vix dimidiam lineam ſuperabat. Pondus huius lapidis ex igne exemti deprehenſum

- - - - - 199, 3 gran.
et ex aqua extracti - - 275, 3

Differentia igitur terminorum 76 granorum, quibus in ſcala reſpondent 30 pollices, et ſi placet cum gradibus commutari poſſunt.

Menſ.	H. max.	H. min.	Differ.	H. max	H. min.	Differ.
	1777			1778		
	Gran.	Gran.	Gran.	Gran.	Gran.	Gran.
Ianuar.	49, 6	30, 2	19, 4	53, 4	44, 2	9, 2
Febr.	51, 2	38, 4	12, 8	46, 6	17.	29, 6
Mart.	46.	13, 3	32, 7	46.	13.	33.
Apr.	39	10.	29.	38, 8	11.	27, 8
Mai	30, 8	9, 6	21, 2	36.	11, 3	24, 7
Iun.	44.	11.	33.	38.	10, 8	27, 2
Iul.	45, 7	12.	33, 8	39, 5	11, 4	28.
Aug.	46, 2	13, 8	32, 4	- - -	- - -	- - -
Sept.	53, 2	19.	34, 2	61, 2	30, 7	30, 5
Octob.	54 8	25, 3	29, 5	57, 6	38.	19, 6
* Nov.	55, 6	50, 3	5, 3	56, 4	38, 7	17, 7
* Dec.	56, 7	50.	6, 7	60, 6	50, 2	10, 4

Menſibus aſteriſco notatis, non ſingulis diebus obſeruationes conſignatae ſunt.

 Maxi-

Maxima omnium humiditas obſeruata 61, 2 gran.
et minima - - - - 9, 6
vnde differentia - - - - 51, 6
et media aëris conſtitutio reſpondet 35, 4 granis, quod parum differt a 38 gr. ipſo experimento detectis.

Vt ex variationibus Hygrometri mutationes Atmoſphaerae definiantur; notum debet eſſe, vtrum lapis humorem aëris proportionaliter recipit ac expellit; qua de re ſaepe quidem cogitabamus, votorum tamen noſtrorum finem nondum ſumus aſſecuti; obſeruationes Hygrometricae conferendae forent cum obſeruationibus circa quantitatem pluuiae lapſae et euaporationis aquae, quas nobis facere non licuit. Omnem itaque ſcrupulum, qui in hac materia ſupereſt, alio reſeruamus tempori.

PHYSI-

PHYSICA.

ANALYSIS CHEMICA
AGARICI FVGITIVI ET BOLETORVM BOVINI ATQVE IGNIARII,

Auctore

I. G. GEORGI.

Poſt examen Confervae, in Actis Academiae (Ann. MDCCLVIII. Part. I.) exhibitum, in Fungorum Species varias, circa Petropolin copioſe provenientes inquirere coepi, e quibus hic praeſertim ſeligo *Agaricum fugitiuum* a Cel. *Gleditſch* (Meth. Fungor. ſp. 4.) ſic appellatum, atque varietates *Boleti bouini* et *igniarii L.* ad arborum truncos excreſcentes.

Agaricus fugitiuus, fimetorum praeſertim tetra progenies, in inſula *S. Baſilii*, quae Petropoleos partem conſtituit, humida autumnali tempeſtate partim in ruderatis, poſt habitationum incendia paſſim relictis, partim circa fimi quisquiliarumque acervos, et in lignis putridis, modo ſubſolitarius, modo caeſpitatim, deni imo vigeni ſimul, pullulat. Pluvioſo coelo periodum vegetationis, ab ortu usque ad computreſcentiam, intra quatriduum, immo biduum abſoluit; mutabili etiam tempeſtate non vltra ſex vel

vel octo dies durat, vnde fere oculis ſpectandum exhibet incrementum. In vegeto pulpa alba eſt, pereunti fuſceſcit et in ichorem nigrum paene tota diffluit. Per totum vegetationis ſtadium cadaueroſo foetore offendit nares, ideoque licet acrioris veneni expers, neque ab animalibus comeditur, neque Inſectis eorumque Laruis alimento eſt, eoque ſe pro examine noſtro chemico et indagandis principiis animali vel vegetabili regno peculiaribus, praecipue commendat.

Collecti et in quocunque vaſe coaceruati Agarici fugitiui, intra diem, auctioreque calore intra paucas horas, in ichorem diffluunt nigricantem, aquoſum. Membranacei quidquid non diſſoluitur, mucoſam exhibet faciem et ſiccatum nonam circiter, decimamue partem, ponderis recentium fungorum, exaequat.

Ichor diſſolutione Agaricorum ortus, muccidus apparet, initio ſtatim aëris bullas haud copioſas ſecernit, dein perſtat iners, cadaueroſum ſeruat odorem, guſtu ſubdulcis eſt, ſine acredine vlla, et in phialis anguſtis luci obuerſus, pellucido bruneo eſt colore, qui chartas flaua tinctura imbuit. Poſt aliquot dies ſupernatat lympha flaveſcens, ſubſidet materia nigra. *Lympha* evaporata in extractum mucoſum, inſipidum vertitur, quod licet annuo ſpatio aſſeruatum. veſtigia ſalis eſſentialis plane nulla exhibet. At *Sedimentum*, aqua ablutum et ſiccatum, in pulverem tenerrimum, aterrimum, levem, ſubinſipidum, mucorei odoris vertitur, cuius e duodecim libris Agaricorum vnciae duae cum ſemiſſe prodierunt. Isque puluis ſolutioni gummoſae, cum tantillo Aluminis, intritus, atramentum,

mentum, chinenſis ſubaemulum, odoramentis gratius reddendum, praebet.

Puluis idem ſedimenti, flammae candelae inflatus, ſcintillatim uritur. Acidis vitrioli vel nitri neque ſoluitur, nec mutat colorem. In Lixiuio alcalino itidem color non magis, imo nec odor perit; aliquantulum tamen ſoluitur, quod per euaporationem colaturae flavum exhibet extractum.

Semuncia pulueris ſiccati Alcohole penitus extracta, tincturam dat flauam; huiusque euaporatione reſinam vegetabilem, quae lota ſcrupuli pondus habet.

Triginta ſex uncias ſucci per colliquationem Agaricorum nati, e cucurbita deſtillaui. Exiguo calore ſpumeſcebat continuo, donec dimidium fere humoris expuliſſem; tunc quieuit et auctiori calore tractari ſe paſſus eſt, vt dein e retorta vitrea, ſaepius mutatis excipulis, ad remanentiam carbonacei reſidui, deſtillari potuerit. Prodiit hac deſtillatione primum aqua limpida, quae reagentibus omnino nihil mutabatur; odorem primum ſeruabat putridum, vappidum, qui dein iam minus et minus notabilis fuit: in lingua velut lubricum ſenſum excitabat. Sic priores fuere nouendecim unciae; ſequentes tres aeque limpidae affuſo ſale tartari deliquato odorem emittebant volatilem. Poſtea phlegma ſenſim magis flauum habui, odorem empyreumaticum ſpargens; prodiit ſimul oleum empyreumaticum primum flauum, dein nigricans. Phlegma iſtud nouem unciarum pondus exaequauit; olei drachmae tres ſeparari poterant, fereque tantundem adhaerebat

 collo

collo retortae, ex parte aduſtum. Salis volatilis nihil apparuit.

A phlegmate color viridis in Syrupo violarum; et quod vltimum prodiit, cum acidis ſubefferueſcens, cupro viridem aeruginem inducit. Omne phlegma drachmis ſex Spiritus ſalis ſaturari potuit, amiſſo ſimul odore volatili, et remanente empyreumatico. Euaporatum deinde, reliquit drachmas duas magmatis ſalino-oleoſi, quod tritura cum alcali fixo, volatile ſpargit. Eodem phlegmate vrinoſo creta et Mercurius in acido nitri ſoluta, albo colore praecipitantur. Oleum quoque alcalino volatili principio abundat, eiusque odorem affuſis acidis amittit.

Reſiduum deſtillationis carbonaceum, ſpumoſum, empyreuma oluit, et uncias duas cum dimidia aequauit. Contritum et in aqua coctum omne, flaueſcenti illam colore tinxit; tinctura ad conſiſtentiam mellis (pond. unciae cum didragma) inſpiſſata, guſtum vix excitat, a reagentibus nihil mutatus, et per quatuor menſes adſeruata cryſtallos nullas generat.

Reſiduum a decoctione unciam et ſeptem drachmas pendet, nigricans et ne calcinatione quidem dealbandum. Cum nitri ſex drachmis mixtum in crucibulo detonuit viuide. Maſſa ſeptem drachmarum, lotura ad $2\frac{1}{2}$ drachmas rediit; Lixiuium, affuſo acido, terram vitreſcibilem albam proiecit. Reſiduum non ſolubile feruet cum acidis, ad inſtar terrae calcareae.

Vnciae

Vnciae triginta Agarici fugitiui ſupra ignem citius exſiccati ad tres uncias rediere; in crucibulo ignito ſiccati fungi cum fumo, flammaque comburuntur, primum in carbonem ſpumoſum, continuato igne in nigricantes cineres, quorum pondus fuit drachmar. trium cum ſcrupulo. Ex hoc reſiduo alcalici fixi ſalis grana triginta ſex educi potuere; iterumque igne tortum adhuc grana viginti quinque alcalini, aliquantum (vt etiam prius) muriatico ſale inquinati edidit. Terra mortua indolis eſt calcareae.

* * * * * * * * *

Complures Septembri menſe lectae varietates *Boleti*, quem *bouinum* appellat *Linneus*, in conclaui temperato aſſeruatae breui ſcatebant vermibus albis, pollicaribus, qui parenchymatis magnam partem exedebant. Itaque ſelegi ex his Boletis, qui poſt dies decem nulla inſectorum veſtigia prae ſe ferebant, erantque maximam partem tenerioris aetatis.

Odor his erat terrenus, ſubſtantia alba, ſubfibroſa, fere inſipida. In aëre calidiori ſeptem partes octauas ponderis exſiccatione amittebant, tenaces tunc facti. Recentium contritorum odor pungens exſurgit, raphani ſubaemulus. Hoc modo reſoluuntur in magma flaueſcens, mucilaginoſum, cuius ſuccus exprimi nequit, niſi aqua diluti. Conſeruati etiam in vaſe Boleti ſenſim ſponte diffluunt, muco magis pellucente, ſed foetidiore. Addito calore, copioſior profluit mucus; attamen membranacea compages Boletorum ſeruat formam, ſed eſt mucoſa pariter, et quia humidum aëris abſorbere ſolet, non poteſt exſiccari, niſi calore. Mucus, qui ſponte ſeceſſit, requie fit ſubaquoſus,

 lim-

limpidior, et odore caret. Coctura Boletorum in aqua efficitur extractum minus tenax, inodorum, mucoſum.

Si mucus ſponte natus ad melleam conſiſtentiam euaporetur, ſpeciem mucilaginis admodum lubricae induit, non vero glutinoſus, et guſtu ſubamarus eſt. Extractum eiusmodi, aeque ac decoctione paratum, ultra annum ſeruatur, absque conſpicua concretione ſalina. Ad ſiccitatem calore redacta ambo, Gummi Ceraſorum ſpecie referunt, ſed ab humore aëris denuo ſolent deliqueſcere.

Boleti recentes in aceto vini digeſti, colorem effundunt ſaturate flauum. E tali tinctura prodit aliquantum extracti mucoſi, maceratique Boleti euadunt tenaciores.

Recentes item, in Alcohole extractum largiuntur reſinoſo-vnctuoſum; reſiduo admodum tenaci. Vncia ſiccatorum Boletorum cum Alcohole digeſta praebet tincturam flauentem, e qua obtineri poteſt reſina flauescens, amaricans, cuius elotae ſcrupuli duo prodeunt; (Boletus laricinus verae reſinae dimidium ſui ponderis largitur).

Boleti bouini recentes ex aqua deſtillati dant phlegma vappidi odoris, ſine vllo Olei eſſentialis veſtigio.

Sexdecim unciae eorundem lectiſſimorum et recentium e cucurbita vitrea caute deſtillatae, ſucceſſiue praebuerunt:

a. Phlegma limpidum, fungoſi odoris, ſine empyreumate et ſalino principio, ad vncias vndecim.

b.

b. Phlegmatis flaueſcentis, empireumate volatili fragrantis Vnc. jß.; Exploratum hoc ſulphuris hepate per coctionem parato, nullam aciditatem prodit, neque ſolutionem cretae in acido nitri mutat. Syrupum violarum viridi mutat, et ab inſtillato Alcali deliquato odor magis volatilis inde exſurgit.

c. Phlegmatis obſcure flaui admodum empireumatici Vnciam I. cum drachmis II. In quo reagentia et odor ipſe volatilis principii maiorem abundantiam prodebant.

d. Simul cum hoc phlegmate prodiit Oleum primum flauum, dein fuscum, cuius tantummodo drachmae II. ſeparabiles erant, et tantundem fere retortae collo adhaeſerat Ab iſto oleo, phlegmate mixto Hepar ſulphuris, vt et Cretae ſolutio praecipitatur, quod ſimul acidi et alcali volatilis ſeu ammoniacalis principii indicium eſt.

Reſiduus a deſtillatione Carbo unius unciae, cum drachma et duobus ſcrupulis pondus habuit, forma Boletorum atque textura optime ſeruata, fibris etiam magis, quam in recenti textura, conſpicuis. Contrita et aqua elota ſalis muriatici grana decem exſtitere; alcali defuit. Simul cum ſale, extracti fuscescentis gr. X. prodiere.

Elixivata materia carbonacea in crucibulo uſta per bihorium drachmas duas cinerum nigricantium, adeoque non ab omni phlogiſto depuratorum reliquit, quae

per efferueſcentiam cum acidis calcaream indolem prodit, et aquam pauxillo alcalini fixi imbuit.

Boleti bouini ſiccati, ad uncias duo et ſex drachmas crucibulo ignito ingeſti, diuturna cum flamma urebantur; carbo exſtitit ſpumeus, qui diuturniore uſtione in cineres ex albis nigrisque particulis mixtos abit. Hi lixiviatione Alcali vegetabilis ſcrupulos duos reddunt. Terra elota cum acidis feruet; denuo igne diuturno uſtae ad drachmas tres cum dimidia pondus rediit, iterumque ſcrupulum alcalini ſalis cum aliquo muriatici veſtigio dedit. Superfuit tunc terra cinerascens, acidis ſe praebens calcaream.

Boletus itaque bouinus elementa, demto exiguo Alcali volatilis, talia continet quae vel ſunt vegetabilibus propria, vel iisdem cum animalibus communia.

* * *

Boletus igniarius, verſicolor, aliique in truncis arborum paraſitici, humida tempeſtate adeo prompte crescunt, vt obuios culmos, ſtipulasque non eleuent ſed obuoluant et includant. Sicco aëre contrahuntur valde, humido tumeſcunt, et proportione humoris pondere et magnitudine augentur, hygrometricis ideo uſibus apti. Subſtantiam contextam habent fibris parallelis, ſpongioſo-elaſticam, fere inſipidam, vappidi odoris. Tempeſtate quamuis ſicciore in ſylua collecti, in conclaui dimidium adhuc ponderis exſiccatione amittunt.

Coctura in mera aqua prodit ex hisce Boletis extractum mucoſum, parum ſapidum. Addito Salis alcalici fixi

fixi pauxillo, aqua plus educit materiae. Qui remanent fibroſi panniculi leuiſſimi ſunt, tuſique in lanuginem quaſi reſoluuntur, quae fomitem praebet domeſtico vſui, chirurgis ſtypticas turundas.

Vnciae ſexdecim Boletorum recentium, vividiſſimorum, e betulinis truncis lectorum, deſtillatione curioſius e Retorta vitrea inſtituta praebent:

Phlegma limpidum, inſipidum, vappidum ad Uncias quinque cum dimidia.

Phlegma flavescens, empireumaticum neque acidae, nec alcalinae indolis, ad vncias duo cum dimidia.

Phlegmatis rufeſcentis, empyreuma valde olentis, oleoque eiusdem naturae primum flauente, dein fusco ſociati uncias duo cum dimidia.

Atque hoc quidem cum Alcali fixo aliquantum fervet et ob oleum admixtum lacteſcit; ſulphur idem ex Hepate ſulphuris illico cum foetore deiicit, chartam ſucco heliotropii tinctam rubefacit, et omnia criteria ſpiritus lignorum ſic dicti habet.

Oleum, quod ſeparari potuit ſimile oleis lignorum, fuit drachmar. quinque.

In Carbone Fungorum forma perſtiterat, et diſtinctae admodum fibrae conſpectui ſe praebuerunt; pondus eius fuit unciar. trium cum drachmis ſex.

Calcinatione diuturna e carbone fiunt cineres nigricantes, calcareae indolis.

Sex-

Sexdecim unciae Boletorum ex Betulis ſicciore aëre recenter lectorum, combuſtione in crucibulo ignito cinerum leuiſſimorum, coloris cinerei, ſex drachmas dederunt; e quibus lixivium Salis alcali fixi grana quinquaginta octo eduxit, ablutaque terra mortua, calcareae inſtar cum acidis ferbuit.

Adeoque Boleti arborei plane vegetabilem indolem probaſſe videntur.

DE

DE INCONSTANTIA FABRICAE CORPORIS HVMANI, DE ELIGENDISQVE AD EAM REPRAESENTANDAM EXEMPLARIBVS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Mirum eſt, quam variis modis partes corporis humani, in vno atque in altero dum comparantur corpore, inter ſe diſſentiunt. Non ſolum in venis, earumque minoribus ramis, quorum varietas infinita atque indeterminabilis eſt, vel in truncis earum maioribus, qui haud multo illis conſtantiores eſſe ſolent; non ſolum in arteriis minoribus, maioribusue, quarum in ſummis truncis quos arcus aortae producit, variationes mirabiles exſtant, neque in neruis ſolis, eorumque in diſtributione, quarum partium omnium continuae atque perpetuae inconſtantiae nunquam anatomicorum oculos memoriamque fugere potuerunt, quaeque omnium in ore ſemper vna fuere quaerela communis; ſed etiam in oſſibus, in musculis et in ipſis visceribus, in hepate, ventriculo, in renibus, imo in nobiliſſimis corporis humani partibus, in corde atque in cerebro, adeo vsque ſe natura in varias diffundit formas, vt vix duo inueniantur corpora humana in quibus nobilia haec viſcera in omni-

bus ſuis partibus atque in proprietatibus ſuis, in figura, in ſitu, in proportione plane inter ſe conueniant, imo, quod magis mirum videri oportet, vt nulla in his visceribus particula ſit, quae non varia in variis corporibus inueniatur.

Non nego, conuenientias dari, easque perpetuas; non miras ſimilitudines nego, vbique in corpore humano obuias, et, niſi in ſingulis eius, certe in plurimis manifeſtas partibus. Quae quidem niſi eſſent, nullum, quod dici poſſet, corpus humanum, nulla aliorum animalium quae poſſent vocari, corpora darentur. At aliae iuxta illas conſtantiſſimas notas ſimul ſemper partibus inhaerent notae copioſae, quibus iſtae in ſingulis corporibus a ſe inuicem differunt; eaeque adeo inconſtantes cum conſtantibus ſunt commixtae atque confuſae, vt vix quemquam mortalium, qui eas diſtinguere atque definire poſſit, fore exiſtimem.

Sunt primum ſubtiliores illae differentiae, quae ipſae facile quidem in obuiis partibus comparatis percipiuntur, difficilius autem multo deſcribuntur aut explicantur; quae vel in viſcerum ipſorum, vel in partium, quibus illa conſtant, minorum diuerſis figuris et proportionibus inter ſe mutuo, vel etiam in ſitu harum partium, plerumque et ſemper fere conſiſtere ſolent. Veluti vultus hominum inter ſe differunt, in quibus quot homines tot primo obſervas intuitu vultus diuerſos; quos facile cognoscas, difficile vero, aut nunquam, definias; et qui, innumerabiles licet, in ſolis tamen perpaucarum partium diuerſis figuris et proportionibus conſiſtunt; ita internis ſimiliter corporis noſtri partibus et viſceribus characteres eiusmodi natura impreſſit, quibus ſingulae ſingulorum hominum partes et viſcera ſe a ſui ſimilibus diſtinguunt.

Dein-

Deinde vero alterum, idque praecipuum, eſt genus differentiarum, quo partes, quae viſcera, aut alias corporis noſtri maiores partes efficiunt, vel nouae et peculiares occurrunt, vel ſolitae contra deficiunt, vel aliae pro aliis ſubſtituuntur, vel ita tandem ſolitae alterantur et transformantur, vt pro iisdem ſolitis cognoſci non poſſint, ſed pro nouis et peculiaribus habeantur. Exempla horum omnium in plicis veſiculae felleae, in vaginae vteri plicis carunculisque myrtiformibus, in columnis carneis cordis, in papillis quibus valvulae tenentur, in valvula venae coronariae magnae, in ipſa *Euſtachii* valvula, praenobili nobiliſſimi viſceris particula, imprimis in arteriis, venas enim omitto, et in neruis copioſa occurrunt. Hae eius ſunt indolis differentiae, vt primo intuitu appareant non modo, ſed protinus quoque in quonam conſiſtant, perſpiciantur. Vtque externa corporis humani figura innumeris modis ſimplicior eſt, quam fabrica artificioſiſſima interna; nunquam quoque accidit, vt vel in vultu, vel in caeteris partibus externis, ſi aliquos caſus rariſſimos et monſtra excipias, huiusmodi differentiae appareant. Nunquam in vultu ne minima quidem, quae ad vultum pertineat, particula deficere, nunquam inſolita in vultu vel ſuperflua obſeruata eſt. Nunquam cilia defuerunt aut ſupercilia, nunquam caruncula lacrymalis. Vidi carunculam eam abeſſe in aliquo monſtro, et ipſe hic oculus monſtroſus ea erat natura, vt priuatum caruncula eſſe oporteret, vtque, ſi exſtitiſſet haec particula, hoc ipſum magis monſtroſum in eo oculo et contra naturam fuiſſet.

Non melius autem, neque omnino alia ratione, veritas eorum, quae afferui, plane apparet, quam ſi vel

 par-

partes duorum pluriumue corporum ipſae, vel icones earum minutius et curatius expreſſae, coram inter ſe comparantur. Si vel centies anatomicus aliquam in diuerſis corporibus partem viderit; nonniſi complexum tamen eorum tantummodo ad nouum, quod denuo coram ſit, exemplum adferet in ſua idea, in quibus viſae prius partes inter ſe conuenerant. Elapſa omnia erunt in quibus diſtulerant. Imo, quod magis notatu dignum mihi eſſe videtur, ne in ipſo praeſenti exemplo quidem, niſi id, quod inueteratae ideae iam inhaeret, percipere poterit. Caecus erit ad omnia quae huic ideae contraria ſunt, luſcus ad ea, quae ab illa recedunt, niſi de altero differentiarum genere fuerint, quae ſenſus valdopere feriant. Imo quod plane miraculo proximum eſt, oculatiſſimus ſaepe in iis videndis erit, quae nuspiam in ſuo praeſenti, quod conſiderat, obiecto exiſtunt. Sed iſtud imprimis huc pertinet, quod dixi, aegrius nos ea videre in aliquo praeſenti obiecto, in quibus ab inueterata noſtra idea illud recedit, niſi quidem vehementer oculos ferirent.

Si Ill. *Huberus*, poſtquam egregiam ſuam de vagina vteri iconem ediderat, in eo hanc vaginam exemplo denuo eſſet intuitus, quod poſtea *Hallerus* pingi curauit, parum puto crediſiſſet abeſſe, quin plane nouum hoc *Halleri* exemplum ſuo, quod pinxerat prius, ſit ſimile. At nunc comparentur inter ſe coram binae exemplorum iſtorum icones. Quanta in ſingulis fere particulis differentia, in nymphis, in clitoride, earumque inter ſe ſitu et proportione, in finibus veſtibuli, in lacunis multo apud *Hallerum* copioſioribus, in orificio vrethrae eiusque corpore glandoſo, in carunculis myrthiformibus, ſeu valuulis

Halleri

Halleri et maxime omnium in rugis vaginae, quae vix quidquam inter ſe ſimile in binis iconibus habent. Copia differunt plurimum et ſitu et diſpoſitione et magnitudine et figura, quae longae tranſuerſae reticulatae in vna, diſperſae vel cogregatae et papillares in altera obſeruantur. Atque haec quidem exemplaria vaginarum non ipſa ea ex pluribus ſunt, quae maxime inter ſe differrent.

In atriis cordis, imprimis in dextro, et in ventriculis quoque, quam mirae inueniuntur varietates, ſi plurium hominum corda accuratius delineantur, iconesque inter ſe comparantur. Duas modo eiusmodi icones coram habeo, quarum alteram in diſſertatione de orificio venae coronariae magnae publici iuris feci, alteram mihi conſeruo. At iſtae iam ſufficiunt ad demonſtrandam inſignem in fabrica cordis differentiam. Largior et fere vndulata valuula *Euſtachii* in ea eſt icone, quam edidi, anguſta extenſa acuta in altera; anguſtiſſimam et vix vllam in tertio memini me vidiſſe corde quod non pinxi. Fibrillis aliquot ſubreticulatis extremitas poſterior in priori icone terminatur, anterior, a limbo foueae pro orificio venae coronariae magnae diſtincta, extremo ſine tandem ad latus huius orificii ſe applicat. In altera icone extremitas poſterior ſimplex et tenuiſſima eſt, anterior tota limbo foueae adhaeret, vel potius ipſa hunc limbum efficit, qui in corde priori peculiaris erat, et valuula ad baſin aliquid reticuli habet. Tota mirifice reticulata, qualem nunquam vidi, et qualem vix credo unquam in alio eſſe inuentam cadauere, in Halleri iconibus anatomicis exſtat.

Foſſa oualis ſolitam ſubrotundam figuram in ea,

 quam

quam edidi icone habet; triangularem fere in altera. Foraminula caeca, quae in citata diſſertatione notaui, annulum occupant oualem in icone edita; in altera plurima illorum pars in foſſa continetur.

Valuula orificii venae coronariae magnae pulchra tenuis membranula eſt in edita icone, fundo acuto dextrorſum, lato margine exciſo mobili ſiniſterius terminata; proinde pyramidalis fere figura; paſſim foraminulis notata. Craſſa ſubcarnoſa membrana eſt in icone altera et integerrima, figura fere cylindrica, formaque et habitu tam diuerſo, vt vix eandem eſſe particulam intelligas. In alio corpore orificium venae coronariae magnae vltra Euſtachii valuulam erat et nulla prorſus inſtructum valuula propria, defenſum tamen a valuula *Euſtachii* ipſa.

Paries dexterior auriculae dextrae columnis intus muſcularibus cylindricis ſemper eſt repletiſſimus. Hae longitudinales et ſibi mutuo parallelae ſunt in altera icone, in altera, quam edidi, ſunt arboris inſtar mire ramificatae. Vnus eſt truncus communis, medius, et caeteris craſſior, qui partim vtrinque, partim ſuperius ex apice ſuo, plurimas reliquas ramorum inſtar columnas producit.

In hac, quam mecum habeo, icone, valuula orificii venoſi ventriculi dextri in tres, vt plerumque ſolet, irregulares figura portiones ſubdiuiſa eſt integras; in edita, quae harum portionum poſterior eſt, in duas porro diuiſa eſt portiones minores, vt quatuor numerentur harum valuularum, quae tricuſpidales vocantur: ſiniſterior, quae ſepto incumbit vna, alteraque anterior et duae poſteriores.

ſteriores. In illa icone papilla, quae filamenta ſua in interſtitium inter portionem anteriorem et poſteriorem inſerit, magna longa craſſa et robuſta eſt, multo gracilior minorque et debilior in hac quam edidi. Mediocris papilla eſt quae interſtitium inter portionem valuulae poſteriorem et ſiniſteriorem filamentis ſuis occupat in illa icone non edita; et duae ſunt minores, quae interſtitia inter ſiniſtram et poſteriores et inter poſteriores ipſas portiones tenent in edita. Denique tota portio ſiniſterior, quae ſepto incumbit, et interſtitium inter eam et poſteriorem, ſimplicibus filamentis faſciculatis in ea, quam edidi, icone tenetur. In altera egregia craſſiuſcula papilla ſummo ſepto inſidet, quae filamenta ſua ad illas valuulae partes mittit, et quam ſaepius etiam in aliis iam reperi corporibus.

Longum et taedioſum eſſet notabiles recenſere differentias omnes, et labor infinitus ſingula deſcribere minutiora. Nulla particula eſt, quae non aliter atque aliter in aliis ſe habeat hominibus. Et ipſi embryones gallinacei, eorumque imprimis inuolucra, (hominis enim et animalium quoad varietates natura eadem eſt) adeo non nunquam differunt, vt aliorum animalium embryones eſſe crederes, niſi ex ouo gallinaceo ſcires eſſe petitos. Atque id eo magis, cum inſignem tamen et inexſpectatam inter humanum embryonem menſtruum et ſeptem dierum gallinaceum ſimilitudinem in corpore et in extremitatum primordiis inuenerim; quo fieri non poſſe putes, quin ſumma etiam ſemper ſimilitudo inter gallinaceos ipſos occurrat.

In tanta nunc rerum inconſtantia, ſi fabrica corporis

poris humani vel verbis ſit repraeſentanda, vel arte pictoria; quam normam tandem arbitrare, aut quam fabricam nobis potiſſimum eſſe pro norma eligendam? Eam quaſi vno ore hic omnes clamare audio, quae inter caeteras omnes frequentiſſima eſt. Quo quidem dicto, ſi tanquam regulam vniuerſalem illud intelligendum eſſe velis, vix quidquam a vero magis, vel a bono conſilio, alienum dici poſſe exiſtimo.

Primum *Albinus* iam, non ſatis eſſe, monuit, in conſtruendis iconibus fabricae corporis humani, vt ad naturam iſtae conſtruantur praeſentem; neceſſe eſſe, vt *pulchra* ad eam rem eligatur *natura*. Antequam immortales ſuas tabulas oſſium et muſculorum hominis ille edidiſſet, haud valde anatomicos de euitandis inconſtantiae erroribus ſollicitos fuiſſe videtur. Quodcunque cadauer, dummodo integra eſſet fabrica, nec laeſa effectibus morboſis, aptum eſſe videbatur ad repraeſentandam corporis noſtri ſtructuram, et icones, dummodo fidae eſſent, bonae iudicabantur. Hinc factum eſt, vt in optimis quoque iconibus, non nitor quidem ſculpturae, nec delineationis elegantia, nam id praecipuum erat, quod curabatur, et illud, in quo ſolo reprehenſionem ab critico *Albino* exſpectabant, ſed ipſa veritas iure meritoque ab eo deſideraretur. Quod quidem merito fieri poſſe nemini in mentem venerat; cum ad naturam praeſentem adeo vsque fideliter eſſent delineatae icones, vt ne fila quidem, quibus vaſa aut inteſtina erant ligata, neque acus delineatores obliti eſſent, quibus partes reclinatae fuerant affixae. Sed res plana eſt. Vt enim continuo natura variat; quo magis in icone accurate minutiſſima quaeuis ſunt expreſſa, eo in proximo

ximo quocum illam compares, cadauere inuenies facilius et copioſius ſtructuram ab icone differre; et, ſi cum ſecundo eam, et cum tertio corpore comparaueris, ſemper alia et alia in icone videbuntur apparere vitia.

Albinus ergo primum et variabilem eſſe fabricam corporis humani monuit, et pulcherrimam docuit eſſe praeferendam iis, quae minus pulchrae in aliis exemplis inuenirentur. Vti nunc quaeuis in ſuo genere pulcherrima rariora quoque, haud frequentiſſima eadem, eſſe ſolent; *Albini* ſententiam non eam fuiſſe patet, vt quae inter caeteras frequentiſſima, ſed quae pulcherrima ſit, fabrica eligatur; quamuis haec rarior etiam, immo rariſſima ſit.

Neque male *Albinus* meo quidem arbitratu docuit. Si figura externa hominis exemplaris cauſa ſit repraeſentanda, vel vultus humanus; nemo eſt, qui non pulcherrimam hominis figuram vultumue pulcherrimum praeferat; ſiquidem iſte et deformibus melior, et verus tamen nihilominus vultus humanus vel figura humana eſt aeque ac illae, quae aliis continuo et aliis deformitatibus vel vitiis notantur. Similis plane, prorſusque eadem res eſt cum ſtructura interna. Veluti homines mancos, curuos, gibboſos maleque proportionatos, veluti plumbeos vides et lapides et ſtipites, iterumque formoſos et proportionis elegantia inſignes; ſic corda quoque cerebraque et hepata et reliqua viſcera omnia nunc male conformata obſeruantur, nunc figura et habitu proportioneque et interna ſtructura pulcherrima; ſic vaſorum et neruorum ſyſtema-

ta, ſic oſſium denique et muſculorum compages aut pulchra aut deformia inueniuntur.

Pulchra ergo deformibus et in externa corporis humani figura et in interna eius repraeſentanda fabrica praeferenda ſunt. Cuiusmodi repraeſentatio, niſi cum proximo quouis cadauere inciſo conuenit, docebit ſaltim, quomodo differens haec ſtructura comparata eſſe debeat, docebitque quid elegantiori in ea fabricae humanae ſit conforme, quid ab illa recedat. Et tabulae *Albinianae* muſculorum non natura, vt dicunt, praeſenti, ſeu praeſenti cadauere, ſed natura praeſens *Albinianis* corrigenda et aeſtimanda eſt tabulis.

Deinde Oſteologi, frequentiori procul dubio edocti vſu, multo quam ſplanchnologi et angiologi neurologique feliciores mihi eſſe videntur in eligendis exemplaribus ad demonſtrationes ſuas oſteologicas. Iſti non adeo vsque naturam, vel potius vocabulum *naturae*, venerantur, vt quaelibet oſſa, naturalia dummodo ſint, aeque apta eſſe cenſeant ad Oſteologiam docendam. Ea eligunt, in quibus notabilia oſſium quaecunque, apophyſes, proceſſus, eminentiae, tubercula, foſſae, ſulci, rimae, fiſſurae, cauitates quaelibet aut impreſſiones, foraminulaque ſingula non modo non deficiunt, ſed quam diſtinctiſſime quoque apparent.

Perfectiſſimam igitur illi quidem ſtructuram adhibent ad repraeſentandam fabricam corporis humani et ad formandam ſibi de hac fabrica ideam. Eaque omnino ab *Albini* pulcherrima ſtructura diuerſa eſſe videtur; ſiquidem longi-

longitudo proceſſuum et profunditas ſulcorum foſſarumque et tuberculorum magnitudo nihil ad pulchritudinem oſſis confert, quae, ſi quae eſt in aliquo oſſe, in figura potius oſſis totius et in proportione partium, quibus illud efficitur, conſiſtit.

Tantum abeſt autem, quin ſingula haec oſſium notabilia in ſingulis inueniantur oſſibus, vt in viginti potius exemplaribus vix vnum ſaepe reperiatur, quo omnia ſatis manifeſto demonſtrari queant, vtque modo non ſemper pluribus ſit opus exemplaribus ad alia atque alia demonſtranda. Sic igitur Oſteologorum perpectiſſima ſtructura non magis quam *Albini* pulcherrima et frequentiſſima ſimul ſed potius rariſſima eſt.

Huic *Albini* monito et vſui illi Oſteologorum tertium, idque primarium addendum eſt momentum, ad quod in eligendis exemplaribus ſit reſpiciendum. Vſus conſiderari debet eius partis, quae deſcribenda nobis aut pingenda eſt, et munus, quo ea fungitur. Quae fabrica inter caeteras variantes fabricas omnes quam maxime ad hunc vſum conducit, quaeque aptiſſima ad eum eſt et conuenientiſſima, ea etiamſi ſit rarior, eligenda eſt. Ea tanquam exemplar fabricae eſt conſideranda, cuius niſi natura et reliqua ſimilia reddidit corpora humana omnia, reddere tamen voluit; et tanquam fabrica, a qua dum fabricae corporum aliorum recedunt; eatenus vitioſae iſtae aut defectuoſae et mancae, aut imperfectae ſunt cenſendae.

In veſiculis felleis humanis nonnullis ad collum, vel etiam ad aliquam corporis partem poſtremam, colloque proximam, egregiae intus plicae reperiuntur transuerſales, aut fere ſpirales, inſigniter eminentes et marginibus acutis, quibus in cauitatem reſpiciunt, terminatae. In aliis nullae ſunt eiusmodi plicae, aut, ſi quae ſunt, paruae ſunt et obtuſae et rugae potius quam plicae. Vt vſus autem procul dubio aliquis eſt harum plicarum in remoranda atque in acuenda bile; patet in ſolis illis veſiculis, quae plicas habent maiores copioſioresque et eminentiores, veram eſſe ſtructuram humanam; caeteras eſſe exemplaria defectuoſa.

Sic valuula venae coronariae magnae in aliis cordibus latior reperitur largiorque et breuior; reperitur tenuior ſimul et foraminulis quoque rotundis pertuſa, veluti in eo exemplo fuit, cuius iconem in citata de orificio diſſertatione dedi. In aliis contra anguſtior et longior eſt et planior ſimul et craſſior et integerrima; velut eam in ea icone cordis habeo, quod publici iuris non feci. Si animum aduertas ad vſum huius valuulae, quem minutius in illa diſſertatione explicui, et qui in defendendo orificio contra ſanguinem conſiſtit auriculae, in latus canalis irruentem; multo perſpicies aptiorem eſſe ad hunc vſum eam, quae anguſtior et longior, quaeque ſtrictior et planior et craſſior eſt ea, quae latior eſt breuiorque atque tenuior. Illa itaque vera norma eſt fabricae humanae. Ceterae, quo magis ab illa recedunt, quo ſunt breviores latioresque quoque magis accedunt ad figuram valvulae ſemilunaris; eo ſunt magis vitioſae. Quam pinxi in

in icone edita, ea poſtponenda igitur eſt varietati alteri; ſed frequentior mihi tum illa eſſe videbatur.

Pulcherrima procul dubio aſpectu eſt illa valuula *Euſtachii*, quam *Hallerus* pingi curauit in iconibus ſuis anatomicis; quae tota reticulata atque cribroſa eſt. At quicunque vſus ſpecialis ſit valuulae *Euſtachii*; nullam, facile vides, valuulam vllum vſum habere poſſe, quae penitus perforata ſit atque cribroſa. Iuuat itaque procul dubio iconem habere pulcherrimam ſumma cum arte pictam et ſculptam fabricae elegantiſſimae, tanquam alicuius, quae exſtiterit, quaeque detur, varietatis; at vera ſtructura non eſt, quam conſulto natura fecerit.

His exemplis, quibus facile plura addere poſſem, patet, non ſemper naturam, neque in ſingulis corporibus, vbique omnino ſuum obtinere propoſitum finem; contingere nonnunquam vel cauſis accidentalibus, quaſi morboſis, vel debilitate virium formatricium, nutriciumque, vel impedimentis formationi oppoſitis, vel quibuscunque cauſis aliis, vt fabrica ſtruenda haud ſatis ex voto ſuccedat; contingere contra, vt melius paululum in aliis, in aliis longe optime et mirifice ſuccedat, quo plenum naturae conſilium nobis quaſi manifeſtetur. Tum vſu partis perſpecto igitur, aut ſine perſpecto, in quem partem natura ſtruxit, ea prae ceteris eligenda fabrica erit, qua quam penitiſſime et quam facillime is finis obtinetur.

Denique tamen et fieri poſſe videtur, vt ad frequentiam ſtructurae ſit reſpiciendum. Sunt partes, partiumque ſtructurae, in quibus quid pulchrum imprimis,

quidue perfectum aut vtile dicas ad aliquem finem, neſcias, vbi varietas quaeuis aequum ad omnes illas laudes ius habere, nobis quidem, videtur. Inferius nunc ex aorta, nunc paulo ſuperius, alibi ex arteria renali, arteria ſpermatica oritur; neque quid magis horum conducat ad ſecretionem ſeminis, aut quid pulchrius ſit caeteris, aut quid perfectius, apparet. Sic id ergo quod frequentius inueniſti, eligito.

Ita autem generatim de quatuor his fabricae humanae proprietatibus eligendis ſentiendum eſſe arbitror; vt *pulchra* et *perfecta* ſtructura in oſſibus imprimis et neruis; ea, quae *aptior ad vſum*, potiſſimum in viſceribus ſit quaerenda atque prae caeteris eligenda.

In oſſibus alia completa, diſtincta atque perfecta, incompleta alia, indiſtincta et obtuſa eſſe, neminem fugit; neque latet, quae hominum corpora perfectiora oſſa largiantur. Muſculi ſimiliter magni, diſtincti, toroſi, robuſti in aliis corporibus, in aliis parui, debiles, confuſi et concreti inueniuntur. Sed pulchritudo quoque et oſſibus et muſculis eſt, iterumque deformitas ſua. Sunt craſſa et breuia extremitatum oſſa in aliis hominibus; in aliis longiora et debiliora; elegantem in aliis tum inter craſſitiem et longitudinem, tum reſpectu totius corporis proportionem vides. Sunt recta nimis alia, alia nimis curuata, et eum denique alia ductum habent, quo plane inſignem membro, ex illis compoſito, pulchritudinem concilient. Peluis, iuſto latior, in ſexu potiori praeſertim, femora et pedes, imprimis ſi breuia ſunt, nimium a ſe inuicem vt diſtent, efficit, idemque brachiis vitium adfert iuſto latior thorax.

thorax. Et thorax et peluis anguſtiores quoque iuſto in aliis inueniuntur; cuius poſterioris anguſtia in feminis praeſertim notabile corpori vitium infert. Verbo, vt ſceleto *Albiniano* nihil pulchrius videri poteſt, id ipſum, cum aliis comparatum, innumeras in iis indicabit deformitates, easque continuo alias et alias; vt contra comparatorum ſceletorum vitia detecta nouas continuo pulchritudines in *Albiniano* declarabunt. Similiterque cum muſculis comparatum eſt, quorum pulchritudines deformitatesque, quas corporis figurae externae conciliant, ipſi pictores, expertes omni anatomia, diſtinguere nouerunt. Et vel ſolae tabulae muſculorum *Albinianae*, cum proximo quouis corpore comparatae, innumera variarum deformitatum pulchritudinumque exempla oſtendunt.

Sed minus opus eſſe videtur in oſſibus et muſculis vt de ea, quae aptior ad vſum ſit, fabrica anatomicus ſit ſollicitus. Ab ortu, fibrarumque directione et inſertione, propria cuiuslibet muſculi functio pendet. Iam in ipſis his proprietatibus muſculi minus variant, et ſi quae reperiuntur aut repertae ſunt varietates, rariſſimae iſtae nec cunfundendae cum illis continuis ſunt, quae aliae continuo et aliae in ſingulis corporibus reperiuntur, et quarum quae eligenda potiſſimum ſit, neſcias. Similiterque cum oſſibus eſt comparatum, quae in iis, quae vſum concernunt, variare non ſolent.

Quae ratio pulchritudinis ſit in vaſis et neruis, dubium videri poſſet. Eſt autem profecto his partibus elegantia ſua quae quidem ob communem ſecandi methodum vitioſam, praeſertim in longis extremitatum neruis, haud ſatis ſolet obſeruari.

ſeruari. Plerumque, dum trunci neruorum, eorumque rami praeparantur, illi ab omni celluloſa quam nitidiſſime depurantur. Eſt, quaſi oculos laederet intolerabilis hinc inde neruo adhaerens celluloſa; nec prius quietus animus nobis redditur, quam omnis prouide ſit celluloſa remota. Tum etiam neque figuram recte, neque craſſitiem nerui, neque neruum noſtrum egregium ipſum, ſatis perſpicere atque contemplari poſſe nobis videmur, niſi liberatus a celluloſa penitus ſit. Praeterea et muſculi, neruo ſubiecti, expoliuntur, quod quidem eo magis eſt neceſſarium, cum ad ſurculos vsque minutiſſimos neruum noſtrum proſequimur. Sic omni vinculo ſoluti truncus et rami primarii ex ſedibus ſuis naturalibus plane auferuntur. Funium nunc inſtar extenſorum alii, alii laxorum ad modum, a membro, cui inhaerebant, remoti apparent. Quis ſitus fuerit nerui in ſingulis partibus ſuis? quae via, quam legerit? quis ductus, quo fuerit progreſſus? haec omnia deleta nunc ſunt, nec vnquam poterunt rurſus in hoc quidem corpore inueſtigari. Supereſt, vt albos tuos neruos eſſe videas et cylindricos, quemadmodum caeteri quoque ſunt nerui corporis humani omnes. Atque in ipſis illis proprietatibus deletis, maxime in ductu, quo neruus progreditur, ſumma nerui elegantia conſiſtit. Non mirum ergo eſt, ſi haec minus fuerit obſeruata.

Tantum abeſt autem, quin neruum, a principio, vt fieri ſolet, ad finem vsque ſolutum, in priſtinam poſſis reſtituere ſedem, vt potius, parte modo eius aliqua a vinculo ſoluta, totus iam perditus ſit ductus, totusque iam factus irreparabilis. In ſingulis punctulis enim neceſſe eſt vt ſedes habeatur nerui immota ad ductum eius verum,

ductus

ductusque elegantiam vel perſpiciendam atque cognoscendam, vel exprimendam. Neque poteſt ſoluendo neruum anatomicus, vel ſingulis pro nerui punctis puncta ſibi notare in musculis, vel partibus ſubiectis, vel vnquam denuo ea puncta inuenire, ſi ſemel pars nerui e ſua ſede ſit remota. Et arcus, quem neruus progrediendo deſcribit, vel flexio quaedam, vel inclinatio, innumeris modis arte variari poteſt.

Sic ergo, vt me expediam a digreſſione, procedendum eſt in cognoscendis neruis. Remouendae quae partes incumbunt. Tum hactenus celluloſa a trunco auferenda, qua eum abſcondit; idque per omnem nerui tractum perque primarios ramos, qui in eadem cum trunco ſuperficie natant, faciendum. Quae faciem autem auerſam nerui, imo, quae latera tenet, illumque ad musculos, ſeu partes ſubiectas, annectit, celluloſa intacta ſeruanda. Sic ductus nerui totius cum ramis ſuis primariis, quo vsque iſti apparent, membro in aptum ſitum redacto, delineetur, qua ratione in musculis progreditur et quas ſedes ſingulis ſui et ramorum partibus tenet. Hic labor omnium difficillimus eſt. Eo peracto licet truncum, primariorumque ramorum principia expolire, quo iuſtam nunc craſſitiem neruo vbique et in ſingulis ſui partibus, et proportionem iuſtam, et porro rotunditatem ſuam, aut planitiem, et crenas porro et impreſſiones et fiſſuras, et quaecunque in neruo obſeruabilia ſunt, reddere poſſis. Tandem poſtremo et ſurculos quoque, quo vsque lubet, euoluito et iconi addito. Musculi caeterum methodo Albini ad varia ſtrata pingendi.

Summa mihi elegantia ſemper in ductibus illis, quos nerui progrediendo deſcribunt, reſidere viſa eſt, et

 adeo

adeo vsque de certitudine huius elegantiae fui perſuaſus, vt, niſi pulchri fuerint, quos pinxeram, nerui, non vere, non accurate delineatos eſſe putauerim. Certum eſt quoque, ductus in variis corporibus variare; et meliores igitur, quo vsque haec quidem praeſtari poſſunt, eligendi erunt. Deinde in proportione neruorum ad reliquas partes, et in ramorum ad truncos proportione, certa quoque pulchritudo exiſtit, ad quam ergo ſimiliter reſpiciendum. Vaſis caeterum ſimilis cum neruis conditio eſſe videtur. Quae his autem porro aeque ac illis variabilia ſunt, ortus reſpectu, progreſſus et inſertionis, in iis ad ſolam frequentiam reſpiciendum eſſe exiſtimo.

Certum eſt omnino, etiam viſceribus ſuam, non imaginariam, pulchritudinem eſſe. Vidi in monſtris nonnullis viſcera tam mirifice tamque peculiariter in ſummam concinnata pulchritudinem, vt non potuerim dubitare, quin inter primarios fines in his creaturis natura pulchritudinem viſcerum habuerit. Et in ipſa ſolita quoque viſcerum corporis noſtri fabrica inſignis pulchritudo regnat, quae facilius percipi, quam deſcribi verbis, poteſt. Attamen cum certis, iisque variis, vſibus viſcera manifeſto deſtinata ſunt, in quos magnam fabrica illorum, partiumque minorum configuratio et compoſitio, partem ſibi vindicat; cumque cauitatibus corporis incluſa viſcera lateant, vbi ad externam corporis pulchritudinem nihil conferre poſſunt; veriſimile eſt, primarium naturae in fabrica viſcerum finem vſum eorum, pulchritudinem nonniſi ſecundarium, eſſe. Quare imprimis ad eam quoque, quae vſui conuenientior eſt, fabricam, deinde ad eam, quae pulchrior ſimul caeteris ſit, animum aduertendum eſſe arbitror.

Quam-

Quamuis aliqua pars modo eorum, quae de inconſtantia fabricae corporis humani, de eligendisque ad eam repraeſentandam exemplaribus dixi, praemonenda iis, quae de fabrica dicentur veſiculae felleae humanae, neceſſario fuiſſent; conſultius tamen, neque inutile forte, putaui fore, ſi totam illam ſeriem idearum, vt alia ex aliis naſcuntur, proponerem, propriamque inde potius diſſertatiunculam conficerem. Quo facto ad veſiculam felleam redeo.

NOVAE PENNATVLAE ET SERTVLARIAE SPECIES DESCRIPTAE.

Ab

I. LEPECHIN.

Pennatula Coccinea.

Tab. VII. F. A. Pennatula ſtipite tereti, radicata, lateribus papilloſis polypifloris, ſummitate clauata.

Pennatula noſtra medium conſtituit genus inter alcyonia et pennatulas; ſtipes enim ipſius fixus et quaſi radicatus, naturam alcyonii arguit; aſt ſubſtantia carnea et papillae protuberantes, calyculatae polypiflorae, ad latera et ſummitatem diſpoſitae, ad pennatulas eam relegare ſuadent.

Deſcriptio.

Stipes eſt ſesquipollicem longus, digitum humanum auricularem craſſus, teres, rugoſus, rugis longitudinalibus, totam longitudinem ſtipitis perreptantibus: ad tertiam fere partem ſtipes complanatur, et ex lateribus ipſius propullulant papillae tres aut quatuor lineas longae, molles, calyculatae, ſtriis longitudinalibus notatae, oſculis pertuſae, poly-

polyſiflorae. Polypi ſunt cylindrici, apice ſtellati, radiis, pro more ſuo, octonis. Dictae papillae ad latera vna ſerie diſpoſitae cernuntur, ad ſummitatem vero colliguntur in clauam ſpheroideam, et quaſi capitulum animalculi efformant. Subſtantia totius animalculi eſt mollis, tunica, cutis aemula, obducta, color ſanguineus, atque adeo pulcre cinnabarinus.

Locus; ſinus Candalacenſis maris Albi, vbi profundiſſima loca amat.

Sertularia obſoleta.

Sertularia pinnata, pinnis alternis, calyculis vt plurimum octofariam per quincunces diſpoſitis, ouato-ſubcordatis. Tab. VII. Fig. B.

Deſcriptio.

Pro radicula inſeruit ſubſtantia quaedam membranacea, in medio cuius reperitur punctum corneum planum. Ex eo ſurgit caulis, raro quinque pollices excedens, ſemper ſimplex, cornu colore aemulans, nudus et non niſi ad ſummas diuiſuras calyculis obſitus, a principio articulatus, articulis cylindricis breuibus, ad margines annulis eminentibus notatis. Aſt quo altius aſcendit caulis, eo obſoletiores euadunt articuli, ad ſummum vero obſoletiſſimi, ad latera ipſius conſpiciuntur ſtygmata oblongo ouata, albida. Illis in locis, vbi exeunt rami, caulis parum attenuatur, inflectitur et exiguos emittit denticulos; his formantur rami longiſſimi, continui, cylindracei, laeuigati. Calyculi ſaepe octafariam per quincunces diſpoſiti, vix vltra

ſuperficiem ramuli prominuli, ouato-ſubcordati, oſculo conniuente ſimplici nec exerto.

Locus; oceanus glacialis. Legi varia huius ſpecimina ad littora ſabuloſa promontorii Canin-Nos dicti.

Figura B ſiſtit habitum et magnitudinem naturalem, *b* truncum cum ramulo per microſcopium adauctum. *c* calyculum ſeparatum et auctum.

CYPRINVS BARBVS ET CYPRINVS CAPITO DESCRIPTI

Auctore

A. I. GÜLDENSTAEDT.

Cohorti Cyprinorum cirratorum addidi ante aliquot annos Capoëtam et Murſam, atque ad finem deſcriptionis earum, quae Tomo XVII *Nou. Commentar. Acad. Imp. Petrop.* inſerta eſt, nominibus ſpecificis et reliquos ad eandem cohortem pertinentes piſces diſtinxi, eorumque vberiorem dilucidationem promiſi. Hac plurimum egere mihi videntur Barbus et Capito, ceu ſpecies ſummopere affines, hinc difficillime diſtinguendae.

De Capitone nulla, quantum ſcio, mentio apud ichthyologos occurrit, praeter illam curtam, quae *l. c.* a me exhibita eſt.

De Barbo multi varia tradiderunt, eiusdemque icones reliquerunt; ſed illae deſcriptiones incompletae, et figurae rudes ſunt adeo, vt minime ſufficiant ad diſtinguendum Barbum a Murſa et Capitone.

Icon Barbi, quam Comes *Marſilius* in Tomo IV *Danubii perluſtrati* Tabula 7 dedit, multo praeſtantior eſt illis, quas *Geſnerus* et *Willughbeius* reliquerunt; attamen diffiteri nemo poterit, quod etiam haec *Marſiliana* figura quoad pinnas earumque radios, quoad ſquamarum figuram, et quoad lineam lateralem non ſat fideliter naturam exprimat. Icon nouiſſima, quae in Tabula 25 Tomi 3 *Itinerarii Gmeliniani* invenitur, adeo rudis eſt, vt quemcunque alium Cyprinum oblongum pariter repraeſentare poſſit.

Deſcriptiones, quas Viri Celeberrimi *Willughbeius* (vid. *Hiſt. piſc.* p. 259), Comes *Marſilius* (vid. *Danubius pannonico-myſicus perluſtratus* p. 18), *Gronouius* (vid. *Muſeum ichthyologicum* p. 5), *Leske* (vid. *ichthyologiae lipſienſis ſpecimen* p. 19) et *S. G. Gmelin* (vid. *Reiſe durch Rusſland* Tom. 3. p. 242) de Barbo dederunt, tantum in partibus externis verſantur; *Willughbeius* mentionem viſcerum fecit equidem, ſed breuiſſimam, et quoad inteſtini flexuras probabiliter erroneam; de dimenſionibus, ad diſtinguendas ſpecies affines vtiliſſimis, omnes ſilent.

His defectibus penſitatis mearum partium eſſe duxi, ampliorem Barbi deſcriptionem concinnare, eandemque ad modulum deſcriptionis de Murſa antea datae componere, quo differentia inter has duas ſpecies, et inter Capitonem poſt deſcribendum, eo euidentior eluceſcat.

Speciebus his tribus inter ſe rite diſtinctis vix timeo, ne cum Carpione vnquam porro confundantur, qui equidem cum illis quoad cirros quatuor ad os obuios et quoad

ad oſſiculum tertium pinnae dorſalis denticulatum conuenit, ſed oſſiculo tertio pinnae ani denticulato facile dignoſcitur, atque omni corporis figura, qua multo latior eſt, adeo vt longitudo latitudinem maximam tantum quater ſuperet, nec non ſquamis magnis primo intuitu diſtinguitur. De Carpione iam praeterea *Artedius* ſufficientem ad diagnoſin deſcriptionem et dimenſionem externarum internarumque partium dedit (vid. *deſcript. piſc.* p. 25), quas in indiuiduis maximis, triginta pollices anglicanos longis, pondere ad quatuordecim libras roſſicas accedentibus, in mari caſpio et palude maeotide, praeſertim ad oſtia fluuii Terek, nec non Wolgae et Tanais frequentiſſimis, naturae conſentaneas eſſe cognoui. Carpionem Roſſi ad mare caſpium et ad fluuios hoc mare petentes, nec non ad Tanain, nomine cum Tataris communi Saſan (Сазанъ) appellant, qui Maloroſſis Dynapris accolis Karop dicitur. Illa denominatio accedit ad Scharan, quo nomine Raſciani ad Danubium, ſecundum Comitem *Marſilium* (l. c. p. 17), hunc piſcem imbuunt, et haec analoga eſt nomini eiusdem piſcis vulgari germanico Karp ſeu Karpſe.

Barbus propter cirros ſeu myſtaces Roſſis ad Terek fluuium Uſatſch (Усачъ) dicitur, ſed a Maloroſſis ad Dynaprin Marena, ſeu Marina, ſeu Miron appellatur, quod nomen idem cum raſciano, ſecundum Comitem *Marſilium* (l. c. p. 18) ad Danubium vſitato, Marna ſeu Marniza. Barbus in mari nigro et caſpio abundat. Ex mari caſpio menſibus hyemalibus frequenter adſcendit fluuios Terek et Kumam; in Cyro rarior; in reliquis huius maris fluuiis rariſſimus. Ex mari nigro maiori copia quam Carpio Dynaprin petit.

 Capito

Capito non alibi quam in Cyro a me obſeruatus eſt (vid. *Com. nou. Acad. Sc. Petr.* Tom. XVII. p. 518), nec vnquam ille in palude maeotide ſeu Dynapri poſt crebros piſcatus apparuit; nec aliud nomen praeter illud georgianum Tſchanari mihi innotuit.

Praemiſſis hiſce generalioribus accedamus ad deſcriptiones Barbi et Capitonis ſpeciales.

Deſcriptio Cyprini Barbi.

Statura oblongo-carinata, latitudine quinquies, et in maximis ſexies, craſſitie octies a longitudine ſuperata; magnitudo adulti fere tripedalis, vulgo bipedalis et ſeſquipedalis. Habitum Tabula VIII, piſcem in Dynapri captum magnitudine naturali ſiſtens, exprimit.

Caput depreſſum, glabrum, vertice lato, plano; roſtrum rotundatum, planum, horizontale, ante mandibulam ſuperiorem arcuatam prominens (vid. Tab. X. fig. 3); mandibula inferior rectior, rotundata; rictus oris mediocris, quo aperto mandibula ſuperior e vagina protruditur.

Cirri quatuor; duo ſuperiores ad latera roſtri (*a*), duo inferiores ad angulos oris (*b*), natanti deorſum pendentes, longitudine ſubaequales inter ſe et diametro oris.

Nares oculis propiores quam roſtro, duplices, valvula intermedia aperturam poſticam obtegente.

Oculi ad latera capitis, mediocres; iride flauicante; pupilla nigra, rotunda.

Oper-

Opercula branchiarum plana, aperturas branchiarum obtegentia, laeuia; membrana branchioſtega radiis tribus arcuatis latis (*c*) vtrinque ſtipata; gula latiuſcula.

Dorſum parum a vertice ad pinnam dorſalem adſcendens, obtuſe carinatum; a pinna dorſali ad caudam horizontale, rotundatum; latera planiuſcula; linea lateralis recta, in medio ventri propior quam dorſo; abdomen planum, latum, quo in ſitu prono repoſito gula et extremitas caudalis parum a plano eleuatae ſunt.

Squamae corpus totum obtegentes, imbricatae, mediocres, dorſum verſus fuſceſcentes et punctis nigricantibus irroratae, abdomen verſus albidae, in adultis pariter ac in paruis.

Pinna dorſalis ſolitaria, in medio dorſi ſita, trapezoidea; radiis vndecim vel duodecim, primo breuiſſimo et integro; ſecundo parum breuiore quam tertius, craſſo, integro, acuminato; tertio omnium longiſſimo et craſſiſſimo, poſtice vtrinque ab apice vltra medium ſerrato, denticulis deorſum ſpectantibus; reliquis muticis et ramoſis.

Pinnae pectorales oblongo-acuminatae; radiis octodecim, decreſcentibus.

Pinnae ventrales dorſali oppoſitae, in medio ventre ſitae, obtuſe trapezoideae; radiis nouem, primo maximo et integro, reliquis decreſcentibus et ramoſis.

Pinna ani in medio inter pinnas ventrales et caudam, proxime pone anum obuia; radiis nouem, duobus primis breuibus, tertio longiſſimo et integro, reliquis ramoſis.

Cauda verticalis, biſurca, cruribus aequalibus, radiis nouemdecim, neglectis vtrinque tribus breuibus.

Color pinnarum pectoralium et abdominalium albus, fuſco ſupra punctatus; pinnae ani albicans; dorſi fuſceſcens et nigro nonnunquam maculatus; caudae fuſcus; non raro pinnae omnes pallide rubent.

Dimenſiones partium externarum in duobus indiuiduis, quorum maius ex fluuio Terek, et minus ex Dynapri obtentum eſt, ita inuentae ſunt ſecundum anglicanos pollices et lineas:

	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum - - - - -	18	10	30	—
Longitudo a roſtro ad pinnam dorſalem	8	—	10	10
Longitudo pinnae dorſalis ſecundum dorſum - - - - -	2	—	2	8
Longitudo a pinna dorſali ad caudae radicem - - - -	5	5	11	9
Longitudo a radice caudae ad eius extremum - - - -	4	4	5	2
Longitudo a roſtri extremo ad mandibulam inferiorem - - -	—	7	—	6
Longitudo a roſtri extremo ad marginem operculorum - - -	3	10	4	9
Longitudo a roſtri extremo ad radicem pinnarum pectoralium - -	3	10	5	2

Longi-

	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo a radice pinnarum pectorali-um ad apicem - - -	3	2	3	10
Longitudo a radice pinnarum pectorali-um ad radicem pinnarum ventra-lium - - - -	4	5	7	3
Longitudo pinnarum ventralium - -	2	9	3	2
Longitudo a radice pinnarum ventralium ad pinnam ani - - -	3	4	8	2
Longitudo pinnae ani ad ventrem -	1	3	2	—
Longitudo radii pinnae ani longiſſimi -	3	—	3	2
Longitudo a pinna ani ad caudae radicem	2	8	3	10
Longitudo cirrorum - - -	—	10	1	6
Diſtantia inter roſtrum et cirros poſte-riores - - - -	1	2	—	—
Longitudo et latitudo ſquamarum maxi-marum - - - - -	—	$2\frac{1}{2}$	—	3
Diameter tranſuerſalis inter cirros an-teriores - - - - - -	—	6	1	2
Diameter tranſuerſalis inter cirros po-ſteriores - - - - -	—	11	1	5
Diameter tranſuerſalis inter angulos oris	—	9	1	2
Diameter inter roſtrum et nares - -	1	4	1	—
Diſtantia inter nares et oculos - -	—	5	—	7
Diſtantia inter aperturas branchiarum -	2	2	3	2
Diameter oculorum - - -	—	5	—	5
Diameter perpendicularis capitis inter nares - - - - -	1	2	1	1
Diameter perpendicularis inter oculos -	1	8	1	6
Diameter perpendicularis capitis in ver-tice - - - - -	2	5	2	7

	pol.	lin.	pol.	lin.
Diameter corporis maxima ad pinnam dorſalem - - - - -	4	—	4	10
Diameter corporis perpendicularis ad anum - - - - -	2	9	3	7
Diameter perpendicularis ad caudae radicem - - - -	1	10	2	7
Diameter inter ramos extremos caudae	3	4	4	10
Diameter tranſuerſalis corporis in linea laterali ad branchiarum aperturam	1	11	2	9
Diameter eadem ad pinnas ventrales -	2	—	3	9
Diameter eadem ad pinnam ani - -	1	3	1	9
Diameter eadem ad caudae radicem -	—	6	1	—
Diameter tranſuerſalis maxima - -	2	3	3	11

Anatomia Cyprini Barbi.

Lingua triangularis adnata; tota oris cauitas edentula, glabra. Branchiae vtrinque quatuor, radiis arcuatis, qui apophyſibus muticis breuibus, aequalibus, vtrinque pectinati ſunt; accedit fauces verſus radius quintus ſimpliciter pectinatus, branchia carens.

Cor oblongum, vix coryli magnitudine in piſce ſesquipedali; auricula laxa ampliſſima. Diaphragma tendineum.

Hepar ſtructurae valde ſingularis; ſuperne ad diaphragma ſubſtantia tenui tractum inteſtinalem obuoluens, ſiniſtrorſum deſinens in lobum magnum quadraticum, ſed tenuem; dextrorſum autem lineare ad inteſtini latus per longitudinem ſpithamae deſcendens, ibidemque inter inte-
ſtini

ſtini curuaturas amplificatur in lobulum dextrum oblongo-acuminatum, et in ſiniſtrum cordiformem magnum.

Veſica fellea poſtice ad latus dextrum ventriculi ſita, ipſique arcte adhaerens, et hepatis ſubſtantia tenui fere tota inuoluta, pyriformis, iuglande maior, ductum magnum bipollicarem ſurſum ad ventriculum emittens, bile viridi ſcatens.

Lien triangularis, ſanguinolentus, paruus, ad curvaturam inteſtini primam adhaerens.

Ventriculus ab inteſtino non ſeparatus, ſed tractus inteſtinalis continuus, diametro a gula (*a*) ad anum (*b*) aequabiliter decreſcens, curuaturis inteſtino Murſae (vid. *Nou. Comment. Ac. Sc. Petr.* Tom. XVII. pag. 517) perfecte analogus, figura 2 Tabula X magnitudine naturali ex piſce ſesquipedali, quem Tabula VIII ſiſtit, repraeſentatus, recte extenſus toto piſce vulgo ſeſquilongior, nonnunquam et duplo longior, celluloſa breui arcte connexus, hepatis proceſſus in interſtitia recipiens; in cauitate mucum rubentem et faſciolas nonnullas fouens.

Peritonaeum argenteum, nigro maculatum. Ouaria oblonga, a diaphragmate ad anum decurrentia; veſiculae ſpermaticae in maribus ouariis figura et ſitu analogae.

Veſica aërea ad totum dorſum decurrens, medio conſtricta, argentea; ductus pneumaticus vna extremitate gulae, altera initio partis inferioris veſicae inſertus. Inter ſpinam dorſi et veſicam aëream viſcus ſanguinolentum renale

nale ſitum eſt, eiusdem cum veſica extenſionis, ſuperne valde latum et craſſum.

Caro oſſibus biſurcis ſtipata, alba, dulcis, minus grata, nec pinguis; ſanitati, niſi valde ſalita, nociua ex Dynapris accolarum relationibus diarrhoeam prouocans. Vertebrae quadraginta quatuor, cum prima clauiculam emittente et vltima radiata. Coſtae ſedecim. In alio indiuiduo vertebras tantum quadraginta tres numeraui, ſed coſtas viginti.

Pondus indiuidui triginta pollices longi nouem libras roſſicas adaequat.

Deſcriptio Cyprini Capitonis.

Capito figura externa et ſtatura corporis proxime ad Barbum accedit, latitudine quinquies, craſſitie nonies a longitudine ſuperata. Magnitudo maxima pariter tripedalis. Indiuidui pedalis habitum Tabula IX naturae vbique conſentaneum ſiſtit.

Roſtrum, mandibulae, cirri, nares, opercula branchiarum, dorſum cum reliquo corpore, vt in Barbo nunc deſcripto. Oculorum iris nitidiſſime aurata.

Squamae aliquantum maiores illis Barbi, et colore diuerſiſſimae, qui conſtantiſſimus variis anni temporibus, et in iunioribus vix pollicaribus, et in adultis tripedalibus ſemper inauratus, infra lineam lateralem luteus, ſupra illam fuſco adumbratus.

Pinnis

Pinnis iterum Capito cum Barbo conuenit, ſi ad figuram et radiorum numerum reſpicias; ſed differt colore, qui in omnibus pinnis inferioribus luteus, in ſuperioribus fuſceſcens. Tertius radius pinnae dorſalis equidem vtrinque denticulatus eſt, vt in Barbo, ſed modo non plane eodem; in Capitone nimirum baſin ad medium vsque, in Barbo apicem vltra medium occupant denticuli.

Dimenſiones ſequentes indiuiduorum duorum magnitudine diuerſa inſeruiant ad iconis Tabula IX exhibitae complementum et ad diiudicandam vlteriorem differentiam inter Capitonem et Barbum.

Menſurae anglicanae - - -	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum - - - -	27	—	11	9
Longitudo a roſtro ad pinnam dorſalem	11	6	5	2
Longitudo pinnae dorſalis ſecundum dorſum - - - -	2	7	1	3
Longitudo a pinna dorſali ad caudae radicem - - - -	8	8	3	10
Longitudo a radice caudae ad extremum	4	9	2	—
Longitudo a roſtri extremo ad mandibulam inferiorem - - -	—	9	—	4
Longitudo a roſtri extremo ad marginem operculorum - - -	5	9	2	6
Longitudo a roſtri extremo ad radicem pinnarum pectoralium - -	6	—	2	7
Longitudo a radice pinnarum pectoralium ad apicem - - -	4	2	1	9

	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo a radice pinnarum pectoralium ad radicem pinnarum ventralium - - - - -	6	2	2	7
Longitudo pinnae ani ſecundum ventrem - - - - -	1	6	—	9
Longitudo pinnae ani ab ortu ad apicem	3	3	1	6
Longitudo cirrorum - - -	1	9	—	11
Diſtantia inter roſtrum et cirros anticos	—	9	—	4
Diſtantia inter cirros anticos et poſticos	1	—	—	6
Longitudo et latitudo ſquamarum maximarum - - - -	—	4	—	2
Diſtantia inter cirros anteriores - -	1	—	—	7
Diſtantia inter cirros poſteriores - -	1	6	—	9
Diſtantia inter angulos oris - - -	1	3	—	7
Diſtantia inter roſtrum et nares - -	1	8	—	8
Diſtantia inter nares et oculos - -	—	8	—	4
Diameter oculorum - - -	—	6	—	4
Diameter tranſuerſalis inter nares -	1	4	—	7
Diameter tranſuerſalis inter oculos -	2	2	1	1
Diameter tranſuerſalis inter opercula branchiarum - - -	3	—	1	6
Diameter perpendicularis capitis inter nares - - - - -	1	5	—	8
Diameter perpendicularis capitis inter oculos - - - -	2	2	1	—
Diameter perpendicularis in vertice -	3	2	1	6
Diameter perpendicularis corporis maxima ad pinnam dorſalem - -	5	—	2	5
Diameter perpendicularis corporis ad anum - - - - -	3	4	1	7

Diame-

	pol.	lin.	pol.	lin.
Diameter perpendicularis ad caudae radicem - - - -	2	4	1	1
Diameter inter ramos extremos caudae	5	—	3	7
Diameter tranſuerſalis corporis in linea laterali ad branchiarum opercula	2	8	1	3
Diameter eadem ad pinnas ventrales -	3	—	1	4
Diameter eadem ad pinnam ani - -	1	8	—	10
Diameter eadem ad caudae radicem -	—	6	—	3
Diameter tranſuerſalis maxima - -	3	2	1	6

Ex hiſce dimenſionibus patet, Capitonem a Barbo differre capite longiore, latiore et minus depreſſo; roſtro obtuſiore; corpore aliquantum latiore et tenuiore; pinna dorſali a capite remotiore.

In internis maior et euidentior adhuc differentia inter Barbum et Capitonem.

Lingua, oris cauitas, branchiae, cor, diaphragma, vt in Barbo.

Hepar corpore lato diaphragmati ſuccumbens, in lobos lineares tres fiſſum; lobus primus breuiſſimus, pone ventriculum et ſiniſtrorſum ſitus; lobus ſecundus duplo longior, priori parallelus, dextrorſum obuius; lobus tertius longiſſimus, ad anum vſque deſcendens, antrorſum et dextrorſum repoſitus, inteſtino adhaerens, in medio bifidus; quorum ſiniſter lobulus iterum duobus lobis latioribus, inter inteſtini infimam curuaturam ſitis, auctus eſt.

Veſicula fellea magna, pyriformis, in medio abdominis inter inteſtini gyros repoſita, ductu ſurſum ad ventriculum tendente.

Lien linearis, atro-rubens, per totum abdomen ad latus inteſtini ſiniſtrum decurrens.

Ventriculus ab inteſtino non ſeparatus, ſed tractus inteſtinalis vniformis, pennae anſerinae craſſitie, quater a gula (*a*) ad anum (*b*) ſpiraliter incuruatus, vt figura 3 Tabulae X indicat; gyris celluloſa breui arcte inter ſe connexis; inteſtinum recte extenſum toto piſce duplo longius, et quod excurrit; nam in indiuiduo tredecim pollices longo, inteſtinum viginti ſex pollicibus aequabat; et in altero viginti ſeptem pollices longo, ſexaginta nouem pollices excedebat cibarius canalis.

Peritonaei argentei cuticula tenuiſſima nigra.

Ouaria, veſiculae ſpermaticae, veſica aërea, viſcus renale, vt in Barbo.

Caro ſapida, oſſiculis minus frequentibus ſtipata. Vertebrae quadraginta ſeptem. Coſtae octodecim.

Pondus indiuidui viginti ſeptem pollices longi ſex libris roſſicis cum ſemiſſe adaequauit.

Euidentiſſime igitur patet, Capitonem a Barbo hepatis et lienis figura, inteſtini flexuris, peritonaei colore, vertebrarum coſtarumque numero ſatis ſuperque differre,

ferre, quibus ſi diſcrimina coloris externi addas, non poteris non Capitonem pro diſtinctiſſima Cyprinorum cirratorum ſpecie habere, quam a Murſa adhuc minori negotio dignoſces, noſtram Murſae deſcriptionem et iconem, quas in Tomo XVII *Nouor. Commentar. Acad. Scient. Petrop.* inuenies, cum Capitone collaturus. Differt autem Cyprinus Murſa a Capitone: roſtro longiore, capite acutiore, ore longius tubuloſo, labio inferiore tumido trilobo, corpore minus lato ſeu oblongiore, dorſo lato planiuſculo, ſquamis dimidio minoribus, pinnis inferioribus albidis, non luteis, inteſtini flexuris.

APPENDIX OBSERVATIONVM.

Addamus quaedam, ad hiſtoriam reliquorum Cyprinorum cirratorum pertinentia.

I. De Carpione.

Cyprinus Carpio per Roſſiam auſtralem, in aquis antea p. 241 indicatis, obuius variat colore pro varia aetate, vt iam ex *Rondeletii* obſeruatione *Willoughbeius* (vid. *piſc. hiſt.* p. 245) recte memorat. Iuniores, octo pollices longi, toti cinereo-argentei ſunt, absque vllis aurei ſeu aurantii veſtigiis; grandaeui, triginta pollices longi, toti fuſco-aurei ſunt, maculis quadraticis fuſcis, a tunica ſquamas connectente et tranſparente; etiam his iris argentea et venter albicat.

Squamarum omnium pars prominens ſtriato-aſpera. Squamarum maximarum indiuidui triginta pollices longi latitudo vnius pollicis, longitudo nouem linearum. Foramen longitudinale in ſquamis lineae lateralis oblique ſquamam tranſit.

Radii pinnae dorſalis vulgo viginti tres, pectoralis ſedecim, ventralis nouem, ani nouem, caudae nouemdecim, praeter tres vtrinque breues. Radii craſſi denticulati ſeu ſerrati pinnarum dorſi et ani ordine tertii ſunt, non ſecundi, quanquam duo primi breuiſſimi; nec hi tres primores ſpinoſi, ſed mutici, reliquis tamen rigidiores et ſimplices.

Piſcis triginta pollices longi diameter perpendicularis maxima ſeptem pollicum, et quod excurrit, ac transuerſalis maxima quinque pollicum; eiusdem cirrorum anticorum longitudo ſex linearum, poſticorum dupla. Inteſtinum huius indiuidui a gula ad anum quinquaginta tribus pollicibus longitudine aequabat, cuius flexuras tres ſuperiores totidemque inferiores figura 4 Tabulae X per lineam ſimplicem recuruatam exprimit.

Grandaeui Carpiones, praeſertim aquas ſubſalſas inhabitantes, ſaporis gratia multum ſuperantur a iunioribus, aquarum dulcium incolis. Per Aprilem illi fere tripedales gregatim intrant ex mari caſpio fluuium Terek, eorumque magna copia à Coſacis piſcatur, qui illos longitudinaliter dimidiatos vento per aliquot ſeptimanas exponunt, et ita ſiccatos vel ipſi comedunt, vel populis Caucaſum inhabitantibus et piſcium penuria laborantibus vendunt.

dunt. Palata pulpoſa in figuram cordis ſesquipollicaris exſcinduntur, et aceto atque aromatibus condita ad Roſſiae metropoles ſub titulo linguarum Carpionum transmittuntur. Membranae internae veſicae aëreae eorundem grandaeuorum Carpionum conuolutae pariter ad aërem exſiccantur et ichthyocollae nomine venduntur, quae equidem ichthyocollae, quam Acipenſeres largiuntur, analoga, attamen et colore luteſcenti, et qualitate conglutinandi ea inferior eſt. Ad oſtia Wolgae et Tanais iisdem vſibus Carpiones inſeruiunt.

Icon bona Carpionis, notas omnes characteriſticas, pinnarum praeſertim et cirrorum, exacte referens etiamnum deficit; nouiſſima, quam Cel. *Lepechin* in Tabula 23 Tomi I *itinerarii* exhibuit, habitum piſcis noſtratis bene exprimit.

II. De Gobione.

Cyprinus Gobio pariter in variis aquis a me obſeruatus eſt. Viri Celeberrimi *Artedius* (vid. *deſcript. piſc.* p. 13. n. 5.), *Gronouius* (vid *Muſ. ichthyol.* T. II. p. 2. n. 149.) et *Leske* (vid. *ichthyol. lipſ. ſpec.* p. 26.) deſcriptiones partium externarum huius piſcis dederunt, quas naturae conſentaneas inueni. De viſceribus *Artedius* ait ſimpliciter, quod ſint vt in congeneribus. Sed hoc breuitatis ſtudium ambiguitati locum dat, cum partes internae Cyprinorum *Artedii* quoad figuram, proportionem et ſitum plurimum differant. Breuiter igitur exponam, quas in externis varietates viderim; his ſubiungam earundem partium dimenſiones huc vsque deficientes, tandemque ampliorem viſcerum deſcriptionem.

Tres

Tres quoad colores varietates mihi obuiam iuerunt; prima corpore maculato, pinnis immaculatis; ſecunda corpore immaculato, pinnis maculatis; tertia corpore et pinnis maculatis. Macularum defectum aetatem tantum minorem piſcis indicare, vix probabile videtur, cum longiores immaculatos, breuiores maculatos obtinuerim; hinc in locis et aquis harum varietatum cauſſam latitare mihi perſuadeo. Prima varietas in Kuma ad Caucaſi pedem ſeptentrionalem; ſecunda in riuulis ad Rionem ſeu Phaſin abeuntibus per Imeretiam, nec non in Dynapri per Roſſiam Nouam; tertia in fluuio Moskwa ad metropolin a me obſeruata eſt. Situs et color macularum, ſi adſunt, vt *Artedius l. c.* indicauit, numero autem plures.

Radii, vt mihi ex plurium indiuiduorum inſpectione conſtat, pinnae dorſalis vulgo vndecim, non raro plus vel minus vno; pinnae pectoralis ſedecim vel ſeptemdecim; pinnae ventralis octo vel nouem; pinnae ani pariter octo vel nouem; caudae nouemdecim et tres vtrinque breues.

Indiuidua, quae ex his aquis obtinui, maxima vix ſex pollices anglicanos longa fuerunt, nec his maiora dari incolae perhibent. En! dimenſiones partium externarum ſecundum menſuram anglicanam:

	pol.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	4	6
Longitudo a roſtro ad pinnam dorſalem - -	1	10
Longitudo pinnae dorſalis ſecundum dorſum -	—	8

Longitu-

	pol.	lin.
Longitudo a pinna dorſali ad caudae radicem -	1	4
Longitudo a radice caudae ad eius extremum -	—	9
Longitudo a roſtro ad marginem operculorum -	1	—
Longitudo a roſtro ad pinnarum pectoralium radicem - - - - -	1	—
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	—	9
Longitudo a radice pinnarum pectoralium ad radicem pinnarum ventralium - - -	1	—
Longitudo pinnarum ventralium - - -	—	7
Longitudo a radice pinnarum ventralium ad anum - - - - -	—	6
Longitudo ab ano ad initium pinnae ani - -	—	3
Longitudo pinnae ani ad ventrem - - -	—	5
Longitudo pinnae ani maxima - - -	—	6
Longitudo a pinna ani ad caudae radicem -	—	8
Longitudo cirri vtrinque ad os obuii - -	—	4
Longitudo ſquamarum maximarum - - -	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo ſquamarum maximarum - -	—	2
Diameter transuerſalis inter angulos oris - -	—	4
Diſtantia inter roſtrum et nares - - -	—	4
Diſtantia inter nares et oculos - - -	—	$1\frac{1}{2}$
Diameter inter aperturas branchiarum - -	—	6
Diameter oculorum - - - -	—	2
Diameter perpendicularis capitis inter nares -	—	5
Diameter eadem inter oculos - - -	—	6
Diameter perpendicularis corporis maxima ad pinnae dorſalis initium - - -	—	10
Diameter perpendicularis ad anum - -	—	7
Diameter perpendicularis ad caudae radicem -	—	$3\frac{1}{2}$

 Diame-

	pol.	lin.
Diameter inter ramos caudae - - -	—	10
Diameter tranſuerſalis corporis ad branchias -	—	$6\frac{1}{2}$
Diameter tranſuerſalis corporis maxima - -	—	7
Diameter tranſuerſalis ad anum - - -	—	5

Anatomia Cyprini Gobionis.

Oris cauitas edentula. Branchiae vtrinque quatuor, quarum radii apophyſibus breuibus, obtuſis, glabris vtrinque pectinati ſunt; accedit fauces verſus radius quintus branchia carens, ſimpliciter pectinatus.

Cor triquetrum. Diaphragma tendineum. Hepar quadrilobum; lobis tribus longitudinalibus, linearibus, quorum lateralis quilibet ad ouaria ſeu veſiculas ſpermaticas, medius inter inteſtini curuaturas deſcendit; lobo quarto minimo, triquetro. Veſicula fellea minima, vix percipienda.

Lien minimus, lanceolatus, atro-rubens, inter veſicam aëream et inteſtinum ſitus.

Ventriculus ab inteſtino non ſeparatus, ſed tractus inteſtinalis a gula ad anum fere deſcendit, tunc ad diaphragma iterum recuruatur, tandem ad anum recta procedit, piſcem longitudine non ſuperans.

Peritonaeum argenteum, venis ad ſpinam nigris. Ouaria oblonga, vtrinque ad veſicam aëream totum abdomen menſe Auguſto occupantia, ouulis albis, ſeminis papauerini magnitudine, foeta.

Veſica

Veſica aërea a diaphragmate ad anum extenſa, medio conſtricta. Viſcus renale ad ſpinam oblongum, ſanguinolentum.

Gobio in omni Roſſia frequens, ob carnem ſapidam vbique aeſtimatus, Roſſis dicitur vulgo Piskar (пискарь), qui ab incolis Roſſiae Paruae plane alio nomine Stolbez (столбецъ) appellatur. Horum autem Piskar ſeu Pitſchkur (пичкуръ) Cobitis foſſilis eſt, quam Roſſi vulgo Wjun (вьюнъ) atque Germani Danubii accolae, ſecundum Comitem *Marſilium* (*l. c.* p. 89), Pisgurn ſeu Peiſker nominant.

III. De Tinca.

Cyprini Tincae externarum internarumque partium deſcriptionem, eiusdemque dimenſiones, quas *Artedius* (vid. *deſcr. piſc.* p. 27. n. 14) dedit, naturae quam maxime conſentaneas eſſe perſpexi ex indiuiduis plurimis, quae ex Dynapri, Tanai et Terek fluuio, atque ex lacubus adiacentibus obtinui.

Maximi indiuidui, quod habui, longitudo fuit ſedecim pollicum, et latitudo perpendicularis maxima fere quinque pollicum anglicorum; eiusdemque cirri, quorum vnus vtrinque ad os adeſt, tres lineas non excedebant.

Radios numeraui pinnae dorſalis vndecim vel duodecim; pectoralis ſeptemdecim, plus vel minus vno; ventralis decem vel vndecim; ani decem vel vndecim; cau-

dae ſemper integrae nouemdecim, praeter aliquos vtrinque breues.

Vertebras vidi triginta nouem, et coſtas vtrinque viginti.

Tinca, in omni Roſſia frequens, incolis dicitur Lin.

* * * * * * * * *

Per obſeruationes hucusque prolatas gnarus quilibet confirmata agnoſcet nomina noſtra ſpecifica, quibus omnino ad naturae nutum ſeptem Cyprinos cirratos in Tomo XVII *Nou. Comment. Acad. Scient. Petr.* p. 519. diſtinximus, ita vt in poſterum vix timendum ſit, ne tirones confundantur ſeu periti offendantur, noſtras eorum deſcriptiones cum indiuiduis in natura obuiis conferentes, quippe non breuitatis ſtudio, quo anteceſſores ſaepius peccaverunt, ſed notionibus diſtinctis, omni ſyſtematis ichthyologici ſeu piſcium generum conditori ſufficientibus, lectori placere ſtuduimus. Eundem ad calcem rogamus, vt errores typographicos, qui nobis abſentibus diſſertationem noſtram de Cyprinis cirratis antecedentem, Tomo XVII *Nou. Comm. Acad. Sc. Petr.* inſertam, ingreſſi ſunt, corrigere velint, quorum primarii, vt reliquos leuiores taceamus, ſunt ſequentes: p. 513 lin. 19 loco - inferior mento breuior - lege: inferior multo breuior; p. 518 lin. vlt. loco contortus ita in - lege: contortus. Sed in, pag. 519 lin. penult. loco - cirris 3 - lege: cirris 4.

DIGI-

DIGITALES ALIAE HYBRIDAE (a).

Auctore
I. T. KOELREVTER.

Experimentum I.

Digital. ferrug. ♀.
Digital. obſcura. ♂.
Ann. 1776. d. 28 Iul. Flor. plur.
it. poſtea d. 14 Aug. — —.
Vid. Exp. inuerſ. II.

Deſcriptio.

Primum floruerunt hae plantae hybridae medio Iun. an. 1778. atque altitudinem 3′, 11″ circiter attigerunt.

Caulis tenuior atque flexilis magis, quam ♀, craſſior ac rigidior, quam ♂. In vegetiori indiuiduo e caulis primarii media fere parte rami vndecim, pedem circiter et vltra longi egrediebantur, e folio-

 rum

(a) Vid. Act. Acad. Scient. Petrop. pro anno 1777. Pars prima. p. 215.

rum alis originem ducentes. Ita quoque ex eiusdem baſi, proxime ad radicem, cauliculus alius ſecundarius emerſit, plus quam dimidiae primarii altitudinis, vnicoque ramulo inſtructus. Tam caulium, quam ramorum ſummitates parum nutant.

Folia lineari-lanceolata, partim denticulata, partim integerrima: anguſtiora, breuiora, acutiora, rigidiora, denticulisque copioſioribus atque acutioribus inſtructa, quam ♀; ſed latiora multo, longiora, obtuſiora, teneriora, nec adeo euidenter denticulata, quam ♂ nonnulla eſſe ſolent.

Flores caulis primarii omnem ambitum, ♀ more, fere aequaliter occupant, ſecundariorum vero vnilaterales magis, ♂ ad inſtar, ſunt, mediae inter vtrumque parentem magnitudinis ac formae. Color eorum, qui clauſi adhuc, vel aperturam modo paſſi ſunt, ex obſcure ferrugineo ac profundius purpuraſcente mixtus, in diutius expanſis vero, ſolis praeſertim actione, paullo dilutior quidem, ita tamen, vt florentes hae hybridae ob innatam ac praeualentem ipſarum obſcuritatem ac triſtitiam a hybridis, e ferrug. ♀ et ambig. ♂, vel ex ambig. ♀ et obſcur. ♂. connubio ortis iam eminus facillime diſtinguantur.

Calyx patens, ſine omni nitore dilute viridis ac glaber; ſegmentis ex ouali lanceolatis, margine extremo vel albeſcentibus, vel ſubinde etiam leui purpura tinctis. Laciniae tres ſuperiores patentiſſimae.

Corolla

Corolla magis elongata quidem, nec vrceolata adeo, quam ♀; breuior autem, multoque ventricoſior ♂. Tubus breuis, notabiliter inflexus, ac, ſi baſin eius pallidam excipias, purpura ſuperne profundius tinctus. Ventris ſuperficies ſuperior e ferrugineo purpuraſcens, inferior ſordide luteola, ac venoſa eſt, latera autem in ſpadiceum magis vergunt. Interiora corollae multa ac praeualenti purpura fere vndique ſuffuſa, reticuloque venularum concolori, vel exterius etiam translucente, variegata. Labium ſuperius latum, perbreue, retuſum, obſolete bilobum ac reflexum. Laciniae labii inferioris laterales obtuſiuſculae ac ſubreflexae: intermedia oualis, ſubdeflexa, longiusque multo protenſa, quam in ♂, minus autem longe, nec adeo lingulata, quam ♀. Pili, vt in parentibus; inprimis labii inferioris lacinia intermedia maxime omnium villoſa eſt.

Stamina longiora, rectioraque ♀, breuiora magisque inflexa ♂. Puluis autherarum, vt in ceteris huius generis hybridis.

Piſtillum longius itidem minusque vncatum, quam ♀; brevius autem, magisque incuruatum, quam ♂.

Pericarp. Capſula acutior ac pro ratione longior, nec adeo ventricoſa, qua ♀; aſt breuiori acumine instructa, ampliorque, ♂.

Semina bona vix vlla. Vid. Tab. XI.

Expe-

Experimentum II.

Digital. obſcura ♀.
Digital. ferrug. ♂.
An. 1776. d. 6 Iul. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. I.

Semina bonae notae parciori longe numero inde colliguntur, quam ab experimento praecedenti; plantae autem ex iis prognatae prioribus ſimillimae ſunt.

Experimentum III.

Digital. ambig. ♀.
Digital. obſcura. ♂.
An. 1776. d. 20 Iun. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. IV.

Deſcriptio.

Altitudo harum plantarum, quae an. 1778. primum floruerunt, a 2′, 8″ ad 3′, 8″.

Caulis tenuior ac flexilis magis, quam ♀; craſſior ac rigidior, quam ♂.

Folia longe anguſtiora, rigidiora ac glabriora, quam ♀; multoque latiora, teneriora ac piloſiora, quam ♂: radicalia ex ouali oblonga, caulina lanceolata, omniaque denticulata.

Flores

Flores heteromalli: ♀ minores, aſt ♂ maiores. Color flavus vndique intenſior longe, quam in ♀, dilutior vero, quam in ♂; rufus autem huius maxime notabilis, aſt viuidior longe atque ſuauior.

Calyx laete viridis, ſubpiloſus, inprimis ad laciniarum marginem: laciniis ipſis ex ouato lanceolatis, patentibus.

Corolla ſubdepreſſa ac elongata, ♂ ad inſtar, coloris ſupra e rufo bruni, ſubtus pallide flaueſcentis, intus autem fere aurantii, venisque rufeſcentibus facile vbique, praeprimis autem circa inferiorem floris partem, diſtincte reticulata.

Labium ſuperius breue ac obtuſum, vtrinque denticulo breuiſſimo inſtructum. Labii inferioris lacinia intermedia obtuſe triangula, ſubdeflexa, laterales extrorſum flexae, acuminatae. Pili in fauce corollae eiusque laciniis longiſſimi. Cetera pube vndique tecta.

Stamina breuiora, quam in ♀, longiora, quam in ♂. Antherae autem, more ſolito, minores, quam in vtrisque. Particulae pulueris antherarum maxima ex parte effoetae, collapſae ac irregulares; pauciſſimae bonae adhuc notae.

Piſtillum inter ♀ et ♂ mediae magnitudinis.

Pericarp. Capſula acutior, ac pro ratione longior, nec a-

deo

deo ventricoſa, quam ♀; aſt breuioris acuminis, ampliorque, quam ♂.

Semina bona vix vlla.

Not. Flores harum plantarum coloris in vniuerſum peramoeni, multoque intenſioris ac viuidioris ſunt, quam iſti Digital. ferrug. ♀. ambig. ♂. ita quoque longitudine eosdem ſuperant, amplitudine autem iis cedunt.

Experimentum IV.

Digital. obſcura ♀.
Digital. ambigua ♂.
An. 1776. d. 5 Iul. et ſequ. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. III.

Plantae, hoc experimento enatae, iis Experimenti III ſimillimae.

Experimentum V.

Digital. obſcura ♀.
Digital. lutea ♂. (*b*).
An. 1776. d. 13 Iul. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

Deſcri-

(*b*) Confer. Act. Petrop. ſupra cit. p. 230. Experimentum XXXV olim infructuoſum.

Deſcriptio.

Caulis ac rami craſſiores ac rigidiores, quam ♀; tenuiores autem ac flexiliores, quam ♂. In vno harum plantarum indiuiduo infra medium caulem ex alis foliorum ſeptem rami exorti ſunt, quorum longiſſimi 1′, 4″ aequabant. Proxime ad radicem vero ſex egrediebantur caules ſecundarii diuerſae inter ſe magnitudinis, quorum nonnulli longitudine primario non multo inferiores.

Altitudo harum plantarum maxima, ſub finem Iunii 1778 menſurata, 4′, 11″.

Folia lanceolata, denticulata, multo latiora ac teneriora, quam ♀; aſt anguſtiora ac rigidiora, quam ♂.

Flores heteromalli: ♀ minores, aſt ♂ maiores. Color e luteo ſpadiceo ac flauicante mixtus.

Calyx laete viridis, glaber ac patulus: laciniis lanceolatis.

Corolla extra calycem ſatis incuruata deorſum, fauceque ampliore inſtructa eſt, quam ♂, minus euidenter autem, quam in ♀. Superior ventris pars tubum pallidulum verſus ſpadicea, reliqua eiusdem, ac omnis inferior in luteum intenſiorem vergunt. Praeterea aduſta quaſi macula vtrinque ad angulum labii ſuperioris. Labium ſuperius intus pallide flaueſcens, reflexum, obtuſum ac emarginatum. Laciniae laterales itidem pallide flaueſcentes, ac e

 lata

lata baſi in ſubacutum apicem terminatae. Lacinia intermedia ſubouata, pallide flaueſcens, venulisque e ferrugineo purpuraſcentibus dilutioribus picta. Faucis interiora colore paullo obſcurius purpuraſcente ſuffuſa. Pili in fauce labioque inferiori omni longiſſimi. Reliqua corollae pubeſcentia.

Stamina inter ♀ et ♂ mediam obſeruant proportionem. Pulueris antherarum qualitas, vt in omnibus huius generis hybridis, maxime ſuſpecta.

Piſtillum inter ♀ et ♂ mediae longitudinis ac craſſitiei.

Pericarp. Capſula ſatis acuta; breuius tamen roſtrata, quam ♀, longius vero, quam ♂.

Semina bona vix vlla.

Experimentum VI.

Digital. lutea ♀.
Digital. obſcura ♂. (*c*).
An. 1776. d. 18 Iul. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. V.

Cum plantae hybridae inuerſo modo generatae iis alterius eiusdemque ſpeciei alias ſimillimae ſint, miratus fui,

(*c*) Confer. Act. Petrop. ſupra cit, p. 230 Experimentum XXXIV olim infructuoſum.

ſui, praeſentem hanc florum forma ac colore ab iſta Exp. V. adeo diſcrepantem enaſci potuiſſe, vt pro alia plane compoſitione incautus quisque eam facile habuerit, niſi media inter vtrumque parentem proportio, quam, non obſtante hac diuerſitate, nihilominus luculenter prae ſe ferebant, experimenti veritas, aliaque momenta contrarium ſuaſiſſent. Phoenomeni huius inſoliti ratio absque dubio in matris luteae, in hortis noſtris diu iam coli ſolitae natura quaerenda eſt, cuius degenerationem, culturae fere omnis effectum nunquam deficientem, varietates floribus maioribus vel minoribus, colorisque modo intenſioris, modo pallidioris, in hortis hinc inde obuiae, ſatis ſuperque demonſtrant.

Deſcriptio.

Altitudo harum plantarum a 4′, 9″ ad 5′, 5″.

Caulis ac rami, vt in praecedenti. *Folia* ſimilia.

Flores heteromalli: ♀ maiores, ♂ minores. Color ſuperne e ſpadiceo leuiter purpuraſcens, inferne ſaturate luteus.

Calyx, vt in praeced. ſed foliola paullo longiora, minusque patula.

Corolla extra calycem minus incuruata deorſum, quam in praeced. longior itidem ac anguſtior multo, ventre vix notabili, ac multo minus protuberante, quam in ♀ et ♂.

Aduſta quaſi macula vtrinque ad angulum labii ſuperioris intenſior ac fere purpuraſcens. Labium ſuperius

us intus intenſe flaueſcens ac profundius diuiſum: laciniis anguſtioribus, aſt obtuſioribus. Laciniae laterales anguſtiores et acutiores, colorisque intenſius flaueſcentis. Lacinia intermedia oualis, apice pallidulo, inferius in aurantium vergens, venisque ac lituris lateralibus profundius purpuraſcentibus notata. Pili, vt in praeced.

Stamina cum *Piſtillo* longiora, quam in eadem, mediae quamlibet inter ♀ et ♂ proportionis.

Capſulae forma et ſterilitas eadem.

Not. Flores nonnulli caulis primarii corniculo quaſi nectarifero vno alteroue recto ac oblique retrorſum ſpectante, e medio fere floris latere oriundo, inſtructi, ſingulari naturae luſu. Alterum huius ſpeciei indiuiduum flores exhibebat, iis luteae haud multo longiores, aſt longe breuiores, quam mox deſcriptum, licet quoad colorem ac formam partium ab hoc non multum abluſerit. Haec ipſa etiam indiuiduorum diuerſitas ſententiam meam, quam de degenerata luteae natura ſupra tuli, vlterius confirmat.

Experimentum VII.

Digital. lutea. ♀.
Digital. ambigua ♂. (*d*).
An. 1776. d. 3 Aug. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. VIII.

Deſcri-

(*d*) Confer. Act. Petrop. ſupra cit. p. 225. Experimentum XV olim infructuoſum.

Deſcriptio.

Altitudo harum hybridarum maxima, an. 1778. ſub finem Iunii menſurata, circiter 5′.

Caulis ac rami mediae inter vtrumque parentem craſſitiei.

Folia lato-lanceolata ac obtuſe denticulata: latiora multo, teneriora, laetius virentia ac villoſiora, quam in ♀; anguſtiora, rigidiora, obſcurius virentia ac glabriora, quam in ♂.

Flores heteromalli: magnitudinis inter ♀ et ♂ mediae. Color in vniuerſum paullo intenſior, quam in ♀; aſt pallidus magis, venulisque ac lituris paucioribus minusque euidentibus notatus. Aduſta etiam quaſi macula vtrinque ad angulum labii ſuperioris, ſic quoque binae aliae eiusmodi vtrinque inter tubum corollae ventrisque initium.

Calyx patulus magis, quam in ♀, ſed laciniae non reflexae, nec adeo longae, vt in ♂.

Corolla, vi ♂, ſubdepreſſa, ventre ſatis ampliato ac infra protuberante.

Labium ſuperius obtuſius quidem bidentatum ac latius, quam in ♀; aſt acutius, nec adeo retuſum ac latum, quam in ♂. Labii inferioris lacinia intermedia binaeque laterales, inter longius productam acutioresque ♀ et retuſiorem minusque acuminatas ♂ mediam obſeruant propotionem. Pilorum longitudo ac copia, vt in parentibus.

Stamina et *Piſtillum* inter ♀ et ♂ mediae longitudinis et craſſitiei; antherae autem, hybridarum ſterilium

more

more ſolito minores, puluerisque antherarum particulae plurimae effoetae ac collapſae.

Pericarp. Capſula obtuſior ac ventricoſa magis, quam ♀; acutior vero, quam ♂.

Semina bona vix vlla.

Not. Summa harum plantarum, e connubio luteae cum ambigua tandem enatarum ſterilitas omnium ſolidiſſimum praebet argumentum contra eorum ſententiam, qui vtramque pro vna eademque ſpecie vel vnam pro mera varietate alterius falſo olim proclamauerant.

Experimentum VIII.

Digital. ambigua ♀.
Digital. lutea ♂.
An. 1776 d. 10 Aug. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. VII.

E plurimis ſeminibus, ſatis bonae notae, anno 1777 terrae mandatis, vnica modo mihi enata eſt plantula, iis Exp. inuerſi valde ſimilis, quae vero iam ineunte aetate, neſcio, quo caſu, periit.

• • • • • • • • •

Iconum Explicatio.

Tab. XI. Fig. I. ſpica primaria florum

Digital. { ferrugin. ♀. / obſcurae. ♂.

a. Folium radicale.
b et c. caulina.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

NOVA METHODVS
MOTVM PLANETARVM DETERMINANDI

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Agitur hic de celeberrimo illo Problemate *Kepleriano*, cuius plurimae ſolutiones paſſim ſunt traditae, quae omnes in hoc conueniunt, vt ex data anomalia vera Planetae eius anomalia media definiatur; cum tamen ad vſum aſtronomicum viciſſim ex data anomalia media vera aſſignari deberet. Quanquam autem non difficile erat ſolutionem inuentam per conuerſionem ad hunc ſcopum traducere, methodum directam, qua ex media anomalia inueſtigari queat anomalia vera, vſu non eſſe carituram arbitror. Quamobrem hic conſtitui eam methodum, qua in determinando motu Lunae feliciter ſum vſus, ad Planetas primarios etiam adcommodare, quo clarius natura et vis huius methodi ob oculos exponatur; quandoquidem in illa eiusmodi artificia occurrunt, quae propter multitudinem elementorum, quibus motus Lunae implicatur, non ſatis dilucide perſpiciuntur.

Tab. II. Fig. 18. §. 2. Referat igitur tabula planum, in quo Planeta moueatur, vbi punctum S ſit centrum Solis, axis vero S ♈ ad principium arietis dirigatur. Planeta autem elapſo tempore τ, quod in diebus exprimi aſſumo, peruenerit in P, vnde ad axem demiſſo perpendiculo P Q vocentur binae coordinatae $SQ = x$ et $QP = y$; ipſa autem diſtantia Planetae a Sole ſit $SP = v$, ita vt $vv = xx + yy$. His poſitis couſtat principia motus ſequentes dare binas aequationes;

$$\frac{ddx}{\Delta d\tau^2} = -\frac{x}{v^3} \text{ et } \frac{ddy}{\Delta d\tau^2} = -\frac{y}{v^3},$$

vbi elementum $d\tau$ ſumitur conſtans, et littera Δ denotat certam quantitatem conſtantem, quam ex motu Terrae mox definiemus. Hic autem integrationi harum formularum non immoror, quam tum demum feliciori ſucceſſu ſum ſuſcepturus, cum has aequationes ad vſum commodiorem transformauero, vbi totum negotium multo facilius ſuccedet.

§. 3. Quoniam hic ambae coordinatae x et y, quarum valores ad quoduis tempus aſſignari oportet, maximis variationibus ſunt obnoxiae, dum per totam Planetae orbitam modo fieri poſſunt poſitiuae modo negatiuae, eas ante omnia ad alium axem transferri conueniet, vbi multo minores variationes ſint ſubiturae. Hunc in finem ſtatim motum medium eiusdem Planetae in calculum introduco, quo ſcilicet ſingulae reuolutiones motu aequabili circa ſolem in circulo peragantur. Ducatur igitur recta S M ad locum medium, quem Planeta eodem tempore eſt occupaturus; quippe qui locus ex tabulis mediorum motuum facillime innoteſcit. Vocemus igitur eius longitudinem,

nem, ſeu angulum Υ S M $= \zeta$, qui ergo tempori eſt proportionalis, hancque rectam S M pro hoc tempore tanquam axem ſpectemus, ad quem locum Planetae P per coordinatas orthogonales referamus, quae ſint

S $q =$ X, q P $=$ Y, vnde iterum fit $vv = XX + YY$; ex his vero priores coordinatae ita definiuntur, vt ſit

$$x = X \text{ coſ. } \zeta - Y \text{ ſin. } \zeta \text{ et } y = X \text{ ſin. } \zeta + Y \text{ coſ. } \zeta.$$

Atque nunc iam iſtud commodum ſumus aſſecuti, vt, niſi Planeta enormem habuerit excentricitatem, hae quantitates X et Y exiguas tantum mutationes ſint paſſurae, dum noua abſciſſa S $q =$ X nunquam multum a diſtantia Planetae media a Sole eſt diſcrepatura; applicata autem P $q =$ Y nunquam certos limites, non adeo remotos, eſt transgreſſura. Si enim Planeta excentricitate penitus careret, perpetuo foret X quantitas conſtans et Y $= 0$, quandoquidem hoc caſu motus Planetae in motum medium recideret.

§. 4. Cum igitur ſit $x = X \text{ coſ. } \zeta - Y \text{ ſin. } \zeta$, erit

$$dx = dX \text{ coſ. } \zeta - dY \text{ ſin. } \zeta - d\zeta (X \text{ ſin. } \zeta + Y \text{ coſ. } \zeta)$$

et denuo differentiando, ob $d\zeta$ conſtans, fiet

$$ddx = ddX \text{ coſ. } \zeta - ddY \text{ ſin. } \zeta - 2 d\zeta (dX \text{ ſin. } \zeta + dY \text{ coſ. } \zeta) - d\zeta^2 (X \text{ coſ. } \zeta - Y \text{ ſin. } \zeta).$$

Eodem modo, cum ſit

$$y = X \text{ ſin. } \zeta + Y \text{ coſ. } \zeta, \text{ erit}$$

$$dy = dX \text{ ſin. } \zeta + dY \text{ coſ. } \zeta + d\zeta (X \text{ coſ. } \zeta - Y \text{ ſin. } \zeta) \text{ et}$$

$$ddy = ddX \text{ ſin. } \zeta + ddY \text{ coſ. } \zeta + 2 d\zeta (dX \text{ coſ. } \zeta - dY \text{ ſin. } \zeta) - d\zeta^2 (X \text{ ſin. } \zeta + Y \text{ coſ. } \zeta).$$

Hinc igitur colligimus ſequentes valores:

$$d\,d\,x \operatorname{cof.} \zeta + d\,d\,y \operatorname{fin.} \zeta = d\,d\,X - 2\,d\,\zeta\,d\,Y - X\,d\,\zeta^2$$
$$d\,d\,y \operatorname{cof.} \zeta - d\,d\,x \operatorname{fin.} \zeta = d\,d\,Y + 2\,d\,\zeta\,d\,X - Y\,d\,\zeta^2$$

§. 5. At vero ex aequationibus fundamentalibus ſequitur fore

$$\frac{d\,d\,x \operatorname{cof.} \zeta + d\,d\,y \operatorname{fin.} \zeta}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-x \operatorname{cof.} \zeta - y \operatorname{fin.} \zeta}{v^3} = \frac{-X}{v^3},$$
$$\frac{d\,d\,y \operatorname{cof.} \zeta - d\,d\,x \operatorname{fin.} \zeta}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-y \operatorname{cof.} \zeta + x \operatorname{fin.} \zeta}{v^3} = \frac{-Y}{v^3},$$

quae ergo aequationes, ſubſtitutis valoribus modo inuentis, nobis praebebunt ſequentes formulas per X et Y expreſſas:

$$\frac{d\,d\,X - 2\,d\,\zeta\,d\,Y - X\,d\,\zeta^2}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-X}{v^3}$$
$$\frac{d\,d\,Y + 2\,d\,\zeta\,d\,X - Y\,d\,\zeta^2}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-Y}{v^3},$$

ex quibus ergo binas nouas coordinatas X et Y definiri conuenit.

§. 6. Antequam autem hoc negotium ſuſcipiamus, ex motu Terrae medio, quem pro penitus cognito aſſumere licet, quantitatem conſtantem Δ determinemus. Hunc in finem ſtatuamus diſtantiam mediam Terrae a Sole $= 1$, et iam loco Planetae P ſubſtituamus ipſam Terram, quaſi motu ſuo medio in circulo, cuius radius $= 1$, circa Solem moueretur, fietque hoc caſu $X = 1$ et $Y = 0$, hincque $v = 1$, vnde noſtrae aequationes euadent:

$$-\frac{d\,\zeta^2}{\Delta\,d\,\tau^2} = -1 \text{ et } 0 = 0.$$

Hinc ergo fit

$$d\,\zeta^2 = \Delta\,d\,\tau^2, \text{ ideoque } \Delta = \frac{d\,\zeta^2}{d\,\tau^2},$$

vbi ζ denotat longitudinem Terrae mediam, quae ſi pro tempore τ dierum vocetur $= t$, erit $\Delta = \frac{d\,t^2}{d\,\tau^2}$; ſicque in noſtris formulis loco $\Delta\,d\,\tau^2$ ſcribi conueniet $d\,t^2$. Quamobrem,

obrem, cum tempori propoſito τ reſpondeat motus Terrae medius, quem vtique pro cognito aſſumere licet, cum pro vno die ſit $t = 59'. 8, 19''$, hoc valore introducto pro quolibet Planeta habebimus ſequentes aequationes:

$$\frac{ddX - 2d\zeta dY - Xd\zeta^2}{dt^2} = \frac{-X}{v^3} \text{ et}$$

$$\frac{ddY + 2d\zeta dX - Yd\zeta^2}{dt^2} = \frac{-Y}{v^3}.$$

§. 7. Quia angulus ζ denotat longitudinem mediam Planetae, is ad angulum t datam tenebit rationem; quocirca ſi ſtatuamus $\zeta = nt$, ideoque $d\zeta = ndt$, aequationes noſtrae induent has formas:

$$\frac{ddX}{dt^2} - \frac{2ndY}{dt} - nnX = -\frac{X}{v^3} \text{ et}$$

$$\frac{ddY}{dt^2} + \frac{2ndX}{dt} - nnY = -\frac{Y}{v^3}.$$

Cum igitur ſit $\zeta = nt$, tempore vnius anni, quo ſit $t = 360°$, fiet $\zeta = n.\,360°$, qui eſt motus medius Planetae pro vno anno, hinc pro λ annis motus Planetae medius fiet $\lambda n.\,360°$; vnde patet: Planetam integram reuolutionem eſſe abſoluturum, quando ſit $\lambda n.\,360° = 360$, ideoque $\lambda = \frac{1}{n}$, ita vt tempus periodicum Planetae futurum ſit $= \frac{1}{n}$ annis.

§. 8. Conſideremus nunc etiam diſtantiam mediam noſtri Planetae a Sole, quae ſit $= a$, ac tribuamus Planetae ipſum motum medium, quem ſcilicet eſſet ſecuturus, ſi omni excentricitate careret; tum ergo foret $Y = 0$ et $X = v = a$, pro quo ergo caſu formulae noſtrae dabunt $nn = \frac{1}{a^3}$, conſequenter $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ et $0 = 0$; vnde, cum tempus periodicum Planetae modo ſit inuentum $= \frac{1}{n}$ annis, nunc erit $= a\sqrt{a}$ annis. Sicque patet regula *Kepleri* altera, qua ſtatuit, tempora periodica Planetarum ſequi ratio-

nem

nem ſesquiplicatam diſtantiarum mediarum. Cum enim aſſumſerimus diſtantiam Terrae mediam a Sole $= 1$, quia eius tempus periodicum eſt vnus annus, per hanc regulam tempus periodicum Planetae, cuius diſtantia a Sole media eſt $= a$, vtique aequari debebit $a \sqrt{a}$ annis.

§. 9. In computum nunc etiam trahamus excentricitatem orbitae Planetae, quae tamen non ſit adeo enormis, vt locus Planetae verus a medio non nimis diſcrepet; tum igitur abſciſſa noſtra $Sq = X$ non multum a diſtantia media a diſcrepabit, quem in finem ſtatuamus $X = a(1 + x)$, applicatam vero $qP = Y = ay$, ita vt hae nouae quantitates x et y, quas cum iisdem literis ſupra adhibitis confundi non opportet, tantum fractiones numericas deſignent, certos limites non transgreſſuras. Hincque fiet diſtantia $v = a\sqrt{((1 + x)^2 + yy)}$, quibus valoribus ſubſtitutis nanciſcemur ſequentes binas aequationes:

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2ndy}{dt} - nn(1 + x) = \frac{-(1 + x)}{a^3((1 + x)^2 + yy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2ndx}{dt} - nny = \frac{-y}{a^3((1 + x)^2 + yy)^{\frac{3}{2}}},$$

vbi meminiſſe iuuabit, eſſe $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ et $nn = \frac{1}{a^3}$; vnde, ſi loco $\frac{1}{a^3}$ ſcribamus nn, noſtrae aequationes erunt

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2ndy}{dt} - nn(1 + x) = \frac{-nn(1 + x)}{((1 + x) + yy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2ndx}{dt} - nny = \frac{-nny}{((1 + x)^2 + yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 10.

§. 10. Quatenus hic yy eſt valde paruum prae $(1+x)^2$, formula noſtra irrationalis ſequenti modo in ſeriem euoluetur:

$$((1+x)^2+yy)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3\,yy}{2.(1+x)^5} + \frac{3.\,5.\,y^4}{2.\,4\,(1+x)^7} - \frac{3.\,5.\,7.\,y^6}{2.\,4.\,6\,(1+x)^9} + \text{etc.}$$

quo valore ſubſtituto noſtrae aequationes euadent:

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2n\,dy}{dt} - nn(1+x) = \frac{-nn}{(1+x)^2} + \frac{3.\,nnyy}{2.(1+x)^4} - \frac{3.\,5.\,nny^4}{2.\,4\,(1+x)^6} + \frac{3.\,5.\,7.\,nny^6}{2.\,4.\,6\,(1+x)^8}\ \text{etc.}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2n\,dx}{dt} - nny = -\frac{nny}{(1+x)^3} + \frac{3\,nny^3}{2.(1+x)^5} - \frac{3.\,5.\,nny^5}{2.\,4\,(1+x)^7} + \frac{3.\,5.\,7.\,nny^7}{2.\,4.\,6\,(1+x)^9}\ \text{etc.}$$

§. 11. Quatenus autem quoque x prae vnitate eſt valde paruum, denominatores noſtrarum aequationum denuo in ſeries conuertantur ope huius reductionis:

$$(1+x)^{-\lambda} = 1 - \lambda x + \frac{\lambda(\lambda+1)\,xx}{1.\,2} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\,x^3}{1.\,2.\,3} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 8x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6xx - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + 28x^6 - 36x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^4} = 1 - 4x + 10xx - 20x^3 + 35x^4 - 56x^5 + 84x^6 - 120x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^5} = 1 - 5x + 15xx - 35x^3 + 70x^4 - 126x^5 + 210x^6 - 330x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^6} = 1 - 6x + 21xx - 56x^3 + 126x^4 - 252x^5 + 462x^6 - 792x^7 + \text{etc.}$$

etc. etc.

§. 12. Subſtituamus nunc iſtos valores in noſtris aequationibus, ac terminos ad partem dextram ſecundum dimenſiones, quas literae x et y in iis obtinent, diſponamus,

quo clarius conuergentia terminorum ob oculos ponatur, ſiquidem literas x et y vt quantitates valde paruas reſpicere licet. Erit igitur

$$\frac{ddx}{dt^2}-\frac{2ndv}{dt}=3nnx-3nnxx+4nnx^3-5nnx^4+6nnx^5-7nnx^6 \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{3}{2}nnyy-6nnxyy+15nnxxyy-30nnx^3yy+\tfrac{105}{2}nnx^4yy$$
$$-\tfrac{15}{8}nny^4+\tfrac{45}{4}nnxy^4-\tfrac{315}{8}nnxxy^6$$
$$+\tfrac{35}{16}nny^6$$

$$\frac{ddy}{dt^2}+\frac{2ndx}{dt}=+3nnxy-6nnxxy+10nnx^3y-15nnx^4y+21nnx^5y$$
$$+\tfrac{3}{2}nny^3-\tfrac{15}{2}nnxy^3+\tfrac{45}{2}nnxxy^3-\tfrac{105}{2}nnx^3y^3$$
$$-\tfrac{15}{8}nny^5+\tfrac{105}{8}nnxy^5.$$

§. 13. Diuidamus has aequationes per nn, et cum ſit $nt=\zeta$, exiſtente ζ longitudine media Planetae, ſiue angulo ♈SM, quem ex tabula motuum mediorum Planetae ad quodvis tempus depromere licet, erit $ndt=d\zeta$ et $nndt^2=d\zeta^2$, vnde noſtrae aequationes aliquanto fient ſimpliciores, ſcilicet:

$$\frac{ddx}{d\zeta^2}-\frac{2dy}{d\zeta}=3x-3xx+4x^3-5x^4+6x^5-7x^6 \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{3}{2}yy-6xyy+15xxyy-30x^3yy+\tfrac{105}{2}x^4yy \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{15}{8}y^4+\tfrac{45}{4}xy^4-\tfrac{315}{8}xxy^4 \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{35}{16}y^6 \text{ etc.}$$

$$\frac{ddy}{d\zeta^2}+\frac{2dx}{d\zeta}=3xy-6xxy+10x^3y-15x^4y+21x^5y \text{ etc.}$$
$$+\tfrac{3}{2}y^3-\tfrac{15}{2}xy^3+\tfrac{45}{2}xxy^3-\tfrac{105}{2}x^3y^3 \text{ etc.}$$
$$-\tfrac{15}{8}y^5+\tfrac{105}{8}xy^5 \text{ etc.}$$

§. 14. Iam obſeruauimus, ſi orbita Planetae excentricitate careret, perpetuo fore tam $x=0$ quam $y=0$. Eatenus igitur hae quantitates non euaneſcent, quatenus adeſt

adeſt excentricitas. Statuamus igitur excentricitatem eſſe $= e$, et cum ea tanquam ſatis exigua ſpectetur, facile intelligitur, ambas literas x et y per huiusmodi ſeries convergentes exprimi poſſe:

$$x = eP + eeQ + e^3R + e^4S + e^5T \text{ etc.}$$
$$y = ep + eeq + e^3r + e^4s + e^5t + e^6u \text{ etc.}$$

ex quibus ſtatim colligitur

$$dx = edP + eedQ + e^3dR + e^4dS + e^5dT + e^6dU + \text{etc.}$$
$$dy = edp + eedq + e^3dr + e^4ds + e^5dt + e^6du + \text{etc.}$$
$$ddx = eddP + eeddQ + e^3ddR + e^4ddS + e^5ddT + e^6ddU + \text{etc.}$$
$$ddy = eddp + eeddq + e^3ddr + e^4dds + e^5ddt + e^6ddu + \text{etc.}$$

tum vero pro membris compoſitis habebimus has formulas vsque ad poteſtatem ſextam ipſius e continuatas:

$$\begin{aligned} xx = eePP &+ 2e^3PQ + 2e^4PR + 2e^5PS + 2e^6PT \\ &+ e^4QQ + 2e^5QR + 2e^6QS \\ &+ e^6RR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy = eepP &+ e^3pQ + e^4pR + e^5pS + e^6pT \\ &+ e^3qP + e^4qQ + e^5qR + e^6qS \\ &+ e^4rP + e^5rQ + e^6rR \\ &+ e^5sP + e^6sQ \\ &+ e^6tP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} yy + eepp &+ 2e^3pq + 2e^4pr + 2e^5ps + 2e^6pt \\ &+ e^4qq + 2e^5qr + 2e^6qs \\ &+ e^6rr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 = e^3P^3 &+ 3e^4PPQ + 3e^5PPR + 3e^6PPS \\ &+ 3e^5PQQ + 6e^6PQR \\ &+ e^6Q^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xxy = e^3 pPP &+ 2e^4 pPQ + 2e^5 pPR + 2e^6 pPS \\
&\qquad\qquad + e^5 pQQ + 2e^6 pQR \\
&+ e^4 qPP + 2e^5 qPQ + 2e^6 qPR \\
&\qquad\qquad\qquad + e^6 qQQ \\
&\qquad\qquad + e^5 rPP + 2e^6 rPQ \\
&\qquad\qquad\qquad + e^6 sPP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xyy = e^3 ppP &+ 2e^4 pqP + 2e^5 prP + 2e^6 psP \\
&\qquad\qquad + e^5 qqP + 2e^6 qrP \\
&+ e^4 ppQ + 2e^5 pqQ + 2e^6 prQ \\
&\qquad\qquad\qquad + e^6 qqQ \\
&\qquad\qquad + e^5 ppR + 2e^6 pqR \\
&\qquad\qquad\qquad + e^6 ppS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^3 = e^3 p^3 &+ 3e^4 ppq + 3e^5 ppr + 3e^6 pps \\
&\qquad + 3e^5 pqq + 6e^6 pqr \\
&\qquad\qquad + e^6 q^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^4 = e^4 P^4 &+ 4e^5 P^3 Q + 4e^6 P^3 R \\
&\qquad + 6e^6 PPQQ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3 y = e^4 pP^3 &+ 3e^5 pPPQ + 3e^6 pPPR \\
&\qquad\qquad + 3e^6 pPQQ \\
&+ e^5 qP^3 \qquad + 3e^6 qPPQ \\
&\qquad\qquad + e^6 rP^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xxyy = e^4 ppPP &+ 2e^5 ppPQ + 2e^6 ppPR \\
&\qquad\qquad + e^6 ppQQ \\
&+ 2e^5 pqPP + 4e^6 pqPQ \\
&\qquad\qquad + 2e^6 prPP \\
&\qquad\qquad + e^6 qqPP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
xy^3 = e^4 p^3 P &+ 3e^5 ppqP + 3e^6 pprP \\
&\qquad\qquad + 3e^6 pqqP \\
&+ e^5 p^3 Q \qquad + 3e^6 ppqQ \\
&\qquad\qquad + e^6 p^3 R
\end{aligned}$$

$y^4 = e^4$

$$y^4 = e^4 p^4 + 4 e^5 p^3 q + 4 e^6 p^3 r$$
$$+ 6 e^6 p p q q$$

$$x^5 = e^5 P^5 + 5 e^6 P^4 Q$$

$$x^4 y = e^5 p P^4 + 4 e^6 p P^3 Q$$
$$+ e^6 q P^4$$

$$x^3 y y = e^5 p p P^3 + 3 e^6 p p P P Q$$
$$+ 2 e^6 p q P^3$$

$$x x y^3 = e^5 p^3 P P + 3 e^6 p p q P P$$
$$+ 2 e^6 p^3 P Q$$

$$x y^4 = e^5 p^4 P + 4 e^6 p^3 q P$$
$$+ e^6 p^4 Q$$

$$y^5 = e^5 p^5 + 5 e^6 p^4 q$$

$$x^6 = e^6 P^6$$

$$x^5 y = e^6 p P^5$$

$$x^4 y y = e^6 p p P^4$$

$$x^3 y^3 = e^6 p^3 P^3$$

$$x x y^4 = e^6 p^4 P P$$

$$x y^5 = e^6 p^5 P$$

$$y^6 = e^6 p^6$$

§. 15. Concipiamus nunc omnes hos valores in noſtris aequationibus ſubſtitui, et quia quantitates P, Q, R et *p*, *q*, *r* ab excentricitate *e* immunes eſſe debent, neceſſe eſt, vt in his aequationibus omnes termini, paribus poteſtatibus ipſius *e* affecti, ſeorſim inter ſe aequentur, vnde vtraque aequatio in plures diſcerpetur, dum ſcilicet omnes termini ſimpliciter per *e* multiplicati inter ſe aequales ſtatuuntur, deinde vero illi termini, qui per *e e* ſunt

 affecti,

affecti, tum ii, qui per e^3 ſunt affecti etc. Hoc igitur modo plures adipiſcimur ordines aequationum, ex quibus quantitates incognitas P, Q, R, S et p, q, r, s etc. determinari oportebit. Hos igitur ordines aequationum hic ob oculos ponamus.

Ordo primus,

continens partes ſola litera e affectas.

I. $\frac{ddP}{d\zeta^2} - \frac{2dp}{d\zeta} = 3P$

II. $\frac{ddp}{d\zeta^2} + \frac{2dP}{d\zeta} = 0.$

Ordo ſecundus,

continens partes per ee affectas.

I. $\frac{ddQ}{d\zeta^2} - \frac{2dq}{d\zeta} = 3Q - 3PP + \frac{3}{2}pp$

II. $\frac{ddq}{d\zeta^2} + \frac{2dQ}{d\zeta} = 3Pp$

Ordo tertius,

continens partes per e^3 affectas.

I. $\frac{ddR}{d\zeta^2} - \frac{2dr}{d\zeta} = 3R - 6PQ + 4P^3 + 3pq - 6ppP$

II. $\frac{ddr}{d\zeta^2} + \frac{2dR}{d\zeta} = 3pQ + 3qP - 6pPP + \frac{3}{2}p^3$

Ordo quartus,

continens partes per e^4 affectas.

I. $\frac{ddS}{d\zeta^2} - \frac{2ds}{d\zeta} = 3S - 6PR - 3QQ + 3pr + \frac{3}{2}qq - 6ppQ$
$+ 12PPQ - 12pqP - 5P^4 + 15ppPP - \frac{15}{8}p^4$

II. $\frac{dds}{d\zeta^2} + \frac{2dS}{d\zeta} = 3pR + 3qQ + 3rP - 12pPQ - 6qPP + \frac{9}{2}ppq$
$+ 10pP^3 - \frac{15}{2}p^3P$

Ordo

Ordo quintus,

continens partes per e^5 affectas.

I. $\frac{ddT}{d\zeta^2} - \frac{2\,dt}{a\,\zeta} = 3T - 6PS - 6QR + 3ps + 3qr$
$+ 12PPR + 12PQQ - 12prP - 6qqP$
$- 20P^3Q + 30ppPQ + 30pqPP - \frac{15}{2}p^3q$
$+ 6P^5 - 30ppP^3 + \frac{45}{4}p^4P.$

II. $\frac{ddt}{d\zeta^2} + \frac{2\,dT}{a\,\zeta} = 3pS + 3qR + 3rQ + 3sP$
$- 12pPR - 6pQQ - 12qPQ - 6rPP$
$+ \frac{9}{2}ppr + \frac{9}{2}pqq + 30pPPQ + 10qP^3$
$- \frac{45}{2}ppqP - \frac{15}{2}p^3Q - 15pP^4 + \frac{45}{2}p^3PP$
$- \frac{15}{8}p^5$

Ordo ſextus,

continens partes per e^6 affectas.

I. $\frac{ddU}{d\zeta^2} - \frac{2\,du}{d\,\zeta} = 3U - 6PT - 6QS - 3RR + 3pt$
$+ 3qs + \frac{3}{2}rr + 12PPS + 24PQR + 4Q^3$
$- 12psP - 12qrP - 12prQ - 6qqQ$
$- 12pqR - 6ppS - 20P^3R - 30PPQQ$
$+ 30ppPR + 15ppQQ + 60pqPQ$
$+ 30prPP + 15qqPP - \frac{15}{2}p^3r - \frac{45}{4}p^2q^2$
$+ 30P^4Q - 90p^2P^2Q - 60pqP^3 + 45p^3qP$
$+ \frac{45}{4}p^4Q - 7P^6 + \frac{105}{2}ppP^4 - \frac{315}{8}p^4PP + \frac{35}{16}p^6.$

II. $\frac{ddu}{d\zeta^2} + \frac{2\,dU}{a\,\zeta} = 3pT + 3qS + 3rR + 3sQ + 3tP$
$- 12pPS - 12pQR - 12qPR - 6qQQ$
$- 12rPQ - 6sPP + \frac{9}{2}ppS + 9pqr + \frac{3}{2}q^3$
$+ 30pPPR + 30pPQQ + 30qPPQ$
$+ 10rP^3 - \frac{45}{2}pprP - \frac{45}{2}pqqP - \frac{45}{2}ppqQ$
$- \frac{15}{2}p^3R - 60pP^3Q - 15qP^4 + \frac{135}{2}ppqPP$
$+ 45p^3PQ - \frac{75}{8}p^4q + 21pP^5 - \frac{105}{2}p^3P^3 + \frac{105}{8}p^5P.$

§. 16.

§. 16. In conſtitutione horum ordinum tota vis iſtius methodi potiſſimum continetur, quae adeo multo latius patet, cum etiam eius ope motus lunares expediri queant. Cum enim hactenus ne vllam quidem integrationem tentauerimus, nunc binae aequationes cuiusque ordinis facili negotio integrari poterunt, namque in ordine primo tantum occurrunt binae incognitae P et p, quarum valores per integrationem ad functiones temporis ſiue anguli ζ reducuntur, quibus inuentis ſecundus ordo binas tantum incognitas Q et q complectitur, quas pari modo per tempus exprimere licebit; tum vero ſimili modo ex tertio ordine definientur literae incognitae R et r, et ita porro, vnde tandem veri valores pro binis incognitis principalibus x et y colligentur. Totum autem hoc integrationis negotium in ſequenti Problemate generali oſtendamus.

Problema generale.

§. 17. Propoſitis duabus aequationibus differentialibus ſecundi gradus:

I. $\frac{ddZ}{d\zeta^2} - \frac{2dz}{d\zeta} = 3Z + M$ et

II. $\frac{ddz}{d\zeta^2} + \frac{2dZ}{d\zeta} = N$,

vbi M et N denotant functiones quascunque temporis ſiue anguli ζ, inueſtigare valores binarum quantitatum incognitarum Z et z.

Solutio.

Incipiamus ab aequatione poſteriore, quae ducta in $d\zeta$ et integrata dat $\frac{dz}{d\zeta} + 2Z = \int N d\zeta$, vnde fit

$\frac{dz}{d\zeta}$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \int N\, d\zeta - 2\,Z,$$

qui valor in priore aequatione ſubſtitutus praebet

$\frac{ddZ}{d\zeta^2} - 2\int N\, d\zeta + Z = M$, ſiue $\frac{ddZ}{d\zeta^2} + Z = M + 2\int N\, d\zeta = L$, ponendo breuitatis ergo $L = M + 2\int N\, d\zeta$. Conſtat autem, ſi eſſet $L = 0$, tum fore $Z = \alpha\, \text{coſ.}\, \zeta$, qui valor, etiamſi tantum eſt integrale particulare, tamen ſufficit ad integrale completum inueſtigandum. Statuamus igitur pro noſtro caſu eſſe $Z = v\, \text{coſ.}\, \zeta$, eritque

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -v\, \text{ſin.}\, \zeta + \frac{dv}{d\zeta}\, \text{coſ.}\, \zeta \text{ et}$$

$$\frac{ddZ}{d\zeta^2} = -v\, \text{coſ.}\, \zeta - \frac{2\,dv}{d\zeta}\, \text{ſin.}\, \zeta + \frac{ddv}{d\zeta^2}\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

ſicque noſtra aequatio euadet

$$\frac{ddv}{d\zeta^2}\, \text{coſ.}\, \zeta - \frac{2\,dv}{d\zeta}\, \text{ſin.}\, \zeta = L$$

quae per $d\zeta.\, \text{coſ.}\, \zeta$ multiplicata praebet

$$\frac{ddv}{d\zeta}\, \text{coſ.}\, \zeta^2 - 2\, dv\, \text{ſin.}\, \zeta\, \text{coſ.}\, \zeta = L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dv}{d\zeta}\, \text{coſ.}\, \zeta^2 = \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

vnde colligitur

$$dv = \frac{d\zeta}{\text{coſ.}\, \zeta^2} \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

quae aequatio denuo integrata dat

$$v = \int \frac{d\zeta}{\text{coſ.}\, \zeta^2} \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta = \text{tang.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta - \int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

quo valore inuento erit

$$Z = \text{ſin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

vbi binae formulae integrales iam binas conſtantes per integrationes ingreſſas inuoluunt. Cum deinde ſit

$$\frac{dz}{d\zeta} = \int N\, d\zeta - 2\,Z, \text{ erit}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \int N d\zeta - 2\, \text{ſin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta + 2\, \text{coſ.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

 hinc-

hincque integrando deducitur

$$z = \int d\zeta \int N\, d\zeta - 2\int d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta$$
$$+ 2\int d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta$$

quae aequatio, ſi poſteriores formulae integrales duplicatae reducantur, ſequentem induet formam:

$$z = \int d\zeta \int N\, d\zeta + 2\,\text{coſ.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta + 2\,\text{ſin.}\, \zeta \int L d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta$$
$$- 2\int L\, d\zeta.$$

§. 18. Reſtituamus nunc loco L valorem aſſumtum $M + 2\int N\, d\zeta$, ac pro valore ipſius Z reperiemus

$$\int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta = \int M\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta + 2\,\text{ſin.}\, \zeta \int N\, d\zeta$$
$$- 2\int N\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta \text{ et}$$
$$\int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta = \int M\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta - 2\,\text{coſ.}\, \zeta \int N\, d\zeta$$
$$+ 2\int N\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

vnde fit

$$Z = \text{ſin.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta$$
$$+ 2\int N\, d\zeta - 2\,\text{ſin.}\, \zeta \int N d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta - 2\,\text{coſ.}\, \zeta \int N d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta.$$

Deinde vero pro altero valore z, vbi eaedem formulae iam reductae occurrunt, habebimus

$$z = 2\,\text{coſ.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta + 2\,\text{ſin.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta$$
$$- 2\int M\, d\zeta - 4\,\text{coſ.}\, \zeta \int N\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta$$
$$+ 4\,\text{ſin.}\, \zeta \int N\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta - 3\int d\zeta \int N\, d\zeta.$$

§. 19. Quod ſi ergo M et N fuerint functiones quaecunque ipſius ζ, valores integrales pro Z et z inuenti non parum euadunt perplexi: Verum in reſolutione noſtrorum ordinum commode vſu venit, vt quantitates M et N perpetuo per ſinus et coſinus huiusmodi angulorum: $n\zeta + \alpha$, exprimantur, quemadmodum mox videbimus. Quando autem literae M et N huiusmodi induunt valores, tum integralia

tegralia quaeſita ſatis ſuccincte et concinne aſſignare licebit, id quod in ſequenti Problemate ſpeciali clarius ob oculos ponamus.

Problema ſpeciale.

§. 20. Si binae aequationes differentiales ſecundi gradus huiusmodi habeant formam:

I. $\frac{ddZ}{d\zeta^2} - \frac{2dz}{d\zeta} - 3Z = C\,\text{coſ.}\,(n\zeta + \alpha)$,

II. $\frac{ddz}{d\zeta^2} + \frac{2dZ}{d\zeta} = c\,\text{ſin.}\,(n\zeta + \alpha)$,

inuenire valores integrales pro binis quantitatibus incognitis Z et z.

Solutio.

Haud difficulter quidem Solutio huius Problematis ex praecedenti deduci poſſet, ſiquidem valores integrales completi deſiderarentur; verum quia pro noſtro inſtituto integralia particularia ſufficere poſſunt, quemadmodum in ſequentibus manifeſto patebit, iſta integralia multo facilius inueſtigare poterimus, quandoquidem forma integralium haud difficulter perſpicitur. Hunc in finem ſtatuamus $Z = F\,\text{coſ.}\,(n\zeta + \alpha)$ et $z = f\,\text{ſin.}\,(n\zeta + \alpha)$, vbi tantum coefficientes F et f definiri oportet. Subſtituamus igitur iſtos valores aſſumtos in binis noſtris aequationibus propoſitis, et cum ſit

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -nF\,\text{ſin.}\,(n\zeta + \alpha) \text{ et } \frac{ddZ}{d\zeta^2} = -nnF\,\text{coſ.}\,(n\zeta + \alpha)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = +nf\,\text{coſ.}\,(n\zeta + \alpha) \text{ et } \frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnf\,\text{ſin.}\,(n\zeta + \alpha)$$

aequatio prior in omnibus terminis continebit coſ. $(n\zeta + \alpha)$ poſterior vero ſin. $(n\zeta + \alpha)$, quibus factoribus omiſſis eae induent has formas:

$$-nnF - 2nf - 3F = C \text{ et } -nnf - 2nF = 0$$

ex quibus inueſtigari oportet literas F et f. Ex poſteriore quidem ſtatim colligitur $f = -\frac{2F}{n} - \frac{c}{nn}$, qui valor in priore ſubſtitutus praebet $-nnF + F + \frac{2c}{n} = C$, vnde fit

$$F = \frac{2c - nC}{n(nn-1)} \text{ et } f = \frac{2nC - c(3+nn)}{nn(nn-1)}.$$

§. 21. Pro hoc ergo caſu propoſito valores integrales quaeſiti erunt

$$Z = \frac{2c - nC}{n(nn-1)} \operatorname{cof.}(n\zeta + \alpha) \text{ et } z = \frac{2nC - (3+nn)c}{nn(nn-1)} \operatorname{fin.}(n\zeta + \alpha)$$

atque hinc intelligitur, ſi quantitates M et N plures contineant huiusmodi terminos, veluti ſi aequationes noſtrae eſſent

$$\frac{ddZ}{d\zeta^2} - \frac{2dz}{d\zeta} - 3Z = C\operatorname{cof.}(n\zeta + \alpha) + C'\operatorname{cof.}(n'\zeta + \alpha') + C''\operatorname{cof.}(n''\zeta + \alpha'') + \text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{d\zeta^2} + \frac{2dZ}{d\zeta} = c\operatorname{fin.}(n\zeta + \alpha) + c'\operatorname{fin.}(n'\zeta + \alpha') + c''\operatorname{fin.}(n''\zeta + \alpha'') + \text{etc.}$$

tum, quia Z et z vbique vnicam tantum habent dimenſionem, fore

$$Z = \frac{2c - nC}{n(nn-1)}\operatorname{cof.}(n\zeta + \alpha) + \frac{2c' - n'C'}{n'(n'n'-1)}\operatorname{cof.}(n'\zeta + \alpha') + \frac{2c'' - n''C''}{n''(n''n''-1)}\operatorname{cof.}(n''\zeta + \alpha'') + \text{etc.}$$

$$z = \frac{2nC - (3+nn)c}{nn(nn-1)}\operatorname{fin.}(n\zeta + \alpha) + \frac{2n'C' - (3+n'n')c'}{n'n'(n'n'-1)}\operatorname{fin.}(n'\zeta + \alpha') + \text{etc.}$$

His igitur praemiſſis ſingulos noſtros ordines percurramus.

Reſolutio aequationum primi ordinis.

§. 22. Quoniam hic binae aequationes propoſitae ſunt:

$$\frac{ddP}{d\zeta^2} - \frac{2dp}{d\zeta} - 3P = 0,$$
$$\frac{ddp}{d\zeta^2} + \frac{2dP}{d\zeta} = 0$$

earum integratio ita in genere inſtituatur. Primo poſterior integrata dat $\frac{dp}{d\zeta} + 2P = \alpha$, vnde fit $\frac{dp}{d\zeta} = \alpha - 2P$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet: $\frac{ddP}{d\zeta^2} + P = 2\alpha$. Ponatur hic, vt in ſolutione generali, $P = v \operatorname{coſ.} \zeta$, fietque

$$\frac{ddv}{d\zeta^2} \operatorname{coſ.} \zeta - \frac{2dv}{d\zeta} \operatorname{ſin.} \zeta = 2\alpha$$

quae aequatio, in $d\zeta \operatorname{coſ.} \zeta$ ducta et integrata, praebet

$$\frac{dv}{d\zeta} \operatorname{coſ.} \zeta^2 = 2\alpha \operatorname{ſin.} \zeta + \beta,$$

hincque fit

$$dv = \frac{2\alpha d\zeta \operatorname{ſin.} \zeta}{\operatorname{coſ.} \zeta^2} + \frac{\beta d\zeta}{\operatorname{coſ.} \zeta^2},$$

vnde integrando oritur

$$v = \frac{2\alpha}{\operatorname{coſ.} \zeta} + \beta \operatorname{tang.} \zeta + \gamma,$$

quocirca habebimus

$$P = 2\alpha + \beta \operatorname{ſin.} \zeta + \gamma \operatorname{coſ.} \zeta.$$

Tum vero porro erit

$$\frac{dp}{d\zeta} = -3\alpha - 2\beta \operatorname{ſin.} \zeta - 2\gamma \operatorname{coſ.} \zeta, \text{ vnde fit}$$
$$p = -3\alpha\zeta + 2\beta \operatorname{coſ.} \zeta - 2\gamma \operatorname{ſin.} \zeta + \delta$$

ſicque quatuor in calculum ingreſſae ſunt quantitates conſtantes α, β, γ, δ, quemadmodum integratio binarum aequationum differentialium ſecundi gradus poſtulat, vt integralia completa reperiantur.

§. 23. Quoniam noſtrum Problema vtique eſt determinatum, ex conditionibus quas inuoluit valores ſingulorum harum conſtantium determinari oportet. Ac primo quidem quia angulus ζ denotat longitudinem mediam Planetae

netae, a qua locus verus nunquam vltra datos limites diſcrepare poteſt, manifeſtum eſt eſſe debere $\alpha = 0$. Niſi enim eſſet $\alpha = 0$, quantitas p, ideoque et x, creſcente ζ, tandem in infinitum excreſcere poſſet, id quod indicium eſſet, motum medium non rite eſſe conſtitutum, ex quo neceſſe eſt fieri $\alpha = 0$. Secundo ob eandem rationem quoque quarta conſtans δ nihilo aequari debet, vt locus medius cum vero in certis orbitae locis conueniat. Tertio pro binis reliquis conſtantibus faciamus $\beta = k$ ſin. ε et $\gamma = k$ coſ. ε, vt obtineamus

$$P = k \text{ ſin. } \varepsilon \text{ ſin. } \zeta + k \text{ coſ. } \varepsilon \text{ coſ. } \zeta = k \text{ coſ. } (\zeta - \varepsilon) \text{ et}$$

$$p = 2\, k \text{ ſin. } \varepsilon \text{ coſ. } \zeta - 2\, k \text{ coſ. } \varepsilon \text{ ſin. } \zeta = -2\, k \text{ ſin. } (\zeta - \varepsilon)$$

ex quo poſteriore valore patet, ſi fuerit $\zeta = \varepsilon$, tum fore $p = 0$, ideoque etiam $y = 0$, quatenus ſcilicet a p pendet, ita vt hoc caſu locus verus cum medio conueniat. Quamobrem ſi aſſumamus cum Aſtronomis, hoc euenire in ipſo Aphelio, conſtans ε exhibebit longitudinem Aphelii. Tum vero pro quouis alio ſitu angulus $\zeta - \varepsilon$ exhibet anomaliam mediam, quae cum ſit praecipuum elementum in motu Planetarum, ſtatuamus breuitatis gratia $\zeta - \varepsilon = \theta$, eritque $P = k$ coſ. θ et $p = -2\, k$ ſin. θ; vnde ex hoc ſaltem ordine erit $x = e\, k$ coſ. θ, vbi $e\, k$ iam denotat excentricitatem, quandoquidem, ſumta anomalia media $\theta = 0$, foret diſtantia Planetae a Sole $a\,(1 + e\, k)$; at vero ſumto $\theta = 180°$ prodiret diſtantia Perihelii $= a\,(1 - e\, k)$. Quare cum excentricitas ſupponatur $= e$, neceſſe eſt vt fiat $k = 1$, conſequenter conſtantibus noſtris rite determinatis reſolutio ordinis primi ita ſe habebit: $P =$ coſ. θ et $p = -2$ ſin. θ; vbi θ exprimit anomaliam mediam, et cum ſit $\theta = \zeta - \varepsilon$, erit vtique $d\,\theta = d\,\zeta$, ideoque in ordinibus ſequentibus lo-

co

co $d\zeta$ ſcribere licebit $d\theta$, ita vt ſola anomalia media in calculum ſit ingreſſura.

Reſolutio aequationum ſecundi ordinis.

§. 24. In hoc ordine continentur quantitates incognitae Q et q, his aequationibus expreſſae:

$$\text{I. } \frac{ddQ}{d\theta^2} - \frac{2dq}{d\theta} - 3Q = -3PP + \tfrac{3}{2}pp,$$

$$\text{II. } \frac{ddq}{d\theta^2} + \frac{2dQ}{d\theta} = 3Pp;$$

vbi cum inuenerimus $P = \operatorname{coſ}.\theta$ et $p = -2\operatorname{ſin}.\theta$, erit

$$P^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{coſ}.2\theta,\ Pp = -\operatorname{ſin}.2\theta \text{ et } pp = 2 - 2\operatorname{coſ}.2\theta,$$

hincque noſtrae aequationes erunt

$$\frac{ddQ}{d\theta^2} - \frac{2dq}{d\theta} - 3Q = +\tfrac{3}{2} - \tfrac{9}{2}\operatorname{coſ}.2\theta = M,$$

$$\frac{ddq}{d\theta^2} + \frac{2dQ}{d\theta} = -3\operatorname{ſin}.2\theta = N$$

Quo nunc hic ſolutione ſpeciali (§. 20.) vti queamus, ambae literae M et N in duas partes diſcerptae concipiantur, quarum priores contineant angulum 0θ, alterae vero angulum 2θ, quandoquidem has literas ita repraeſentari licet: $M = \tfrac{3}{2}\operatorname{coſ}.0\theta - \tfrac{9}{2}\operatorname{coſ}.2\theta$ et $N = \operatorname{ſin}.0\theta - 3\operatorname{ſin}.2\theta$. Quia autem pro prioribus partibus fieret $n = 0$, formulae ſupra inuentae euadent incongruae, vnde hunc caſum ſeorſim euolui conueniet. Sit ergo in genere

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} - \frac{2dz}{d\theta} - 3Z = C \text{ et } \frac{ddz}{d\theta^2} + \frac{2dZ}{d\theta} = 0,$$

vbi eſt $C = \tfrac{3}{2}$. Ex poſteriore aequatione fit $\frac{dz}{d\theta} = \alpha - 2Z$, vnde prior euadit $\frac{ddZ}{d\theta^2} + Z = 2\alpha + C = D$. Poſito nunc $Z = v\operatorname{coſ}.\theta$ erit $\frac{ddv}{d\theta^2}\operatorname{coſ}.\theta - \frac{2dv}{d\theta}\operatorname{ſin}.\theta = D$, quae aequatio ducta in $d\theta\operatorname{coſ}.\theta$ praebet integrale

$$\frac{dv}{d\theta}\operatorname{coſ}.\theta^2 = D\operatorname{ſin}.\theta + \beta, \text{ hincque}$$

$dv =$

$$d v = \frac{D\, d\, \theta\, ſin.\, \theta}{coſ.\, \theta^2} + \frac{\beta\, d\, \theta}{coſ.\, \theta^2}$$

vnde integrando colligitur

$$v = \frac{D}{coſ.\, \theta} + \beta\, tang.\, \theta + \gamma; \text{ erit ergo}$$

$$Z = D + \beta\, ſin.\, \theta + \gamma\, coſ.\, \theta, \text{ conſequenter}$$

$$\frac{d z}{d \theta} = \alpha - 2 D - 2 \beta\, ſin.\, \theta - 2 \gamma\, coſ.\, \theta$$

et integrando

$$z = \alpha \theta - 2 D \theta + 2 \beta\, coſ.\, \theta - 2 \gamma\, ſin.\, \theta + \delta,$$

vbi ante omnia obſeruandum eſt, conſtantem α ita accipi debere, vt fiat $\alpha - 2 D = 0$, quia alioquin motus medius non rite eſſet conſtitutus. Erit ergo

$$\alpha = 2 D = 4 \alpha + 2 C, \text{ vnde fit } \alpha = -\tfrac{2}{3} C;$$

tum vero ob rationes ſupra allegatas etiam eſſe oportet $\delta = 0$. Quod autem ad conſtantes β et γ attinet, quia angulus θ in primo ordine iam rite conſtitutus ſupponitur, euidens eſt poni debere $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; ſicque habebimus $Z = -\tfrac{1}{3} C$ et $z = 0$, qui valores adeo ex ipſis aequationibus differentialibus concludi potuiſſent, dum ſcilicet ambae vt conſtantes eſſent ſpectatae.

§. 25. Priores igitur partes pro litteris noſtris Q et q praebent $Q = -\tfrac{1}{3} C = -\tfrac{1}{2}$ et $q = 0$; pro partibus autem poſterioribus, quia eſt $n = 2$, formulae ſupra (§. 20) exhibitae nulla laborant ambiguitate, et cum pro hoc caſu ſit $C = -\tfrac{9}{2}$ et $c = -3$, colligitur $F = \tfrac{1}{2}$, et $f = \tfrac{1}{4}$, ita vt nunc ſit $Z = \tfrac{1}{2}\, coſ.\, 2\, \theta$ et $z = \tfrac{1}{4}\, ſin.\, 2\, \theta$. Vtrosque ergo valores coniungendo habebimus pro ordine ſecundo has determinationes:

$$Q = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\, coſ.\, 2\, \theta \text{ et } q = \tfrac{1}{4}\, ſin.\, 2\, \theta.$$

Reſolutio aequationum tertii ordinis.

§. 26. Binae aequationes huius ordinis ita ſe habent:

$$\text{I. } \frac{ddR}{d\theta^2} - \frac{2dr}{d\theta} - 3R = -6PQ + 4P^3 + 3pq - 6ppP = M$$

$$\text{II. } \frac{ddr}{d\theta^2} + \frac{2dR}{d\theta} = 3pQ + 3qP - 6pPP + \tfrac{3}{2}p^3 = N.$$

Cum igitur iam inuenerimus

$$P = \text{coſ.}\,\theta,\; p = -2\,\text{ſin.}\,\theta,\; Q = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\,\theta \text{ et}$$
$$q = \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,2\,\theta,$$

per notas reductiones angulorum, quibus eſt

$$\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\alpha + \beta)$$
$$\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin}\,(\alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\alpha + \beta)$$
$$\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\alpha + \beta)$$
$$\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\alpha - \beta)$$

colligimus pro priore aequatione

$$PQ = -\tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,\theta,\quad pq = -\tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,\theta,$$
$$P^3 = \tfrac{3}{4}\,\text{coſ.}\,\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\,\theta,\quad ppP = \text{coſ.}\,\theta - \text{coſ.}\,3\,\theta,$$

hincque colligitur

$$M = -\tfrac{9}{4}\,\text{coſ.}\,\theta + \tfrac{25}{4}\,\text{coſ.}\,3\,\theta.$$

Simili modo pro altera aequatione erit

$$pQ = \tfrac{3}{2}\,\text{ſin.}\,\theta - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,3\,\theta,\qquad qP = +\tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,\theta + \tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,3\,\theta,$$
$$pPP = -\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\theta - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,3\,\theta,\quad p^3 = -6\,\text{ſin.}\,\theta + 2\,\text{ſin.}\,3\,\theta,$$

vnde fit

$$N = -\tfrac{9}{8}\,\text{ſin.}\,\theta + \tfrac{39}{8}\,\text{ſin.}\,3\,\theta.$$

§ 27. Hic literae M et N iterum ex duabus conſtant partibus, pro quarum prioribus eſt $n = 1$, pro poſterioribus autem $n = 3$. Priore autem caſu formulae ſupra datae fiunt incongruae, vnde hunc caſum ſeorſim euolui conueniet. Sit igitur

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} - \frac{2dz}{d\theta} - 3Z = C \text{coſ.}\,\theta \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{d\theta^2} + \frac{2dZ}{d\theta} = c\,\text{ſin.}\,\theta,$$

ita vt ſit $C = -\frac{9}{4}$ et $c = -\frac{9}{8}$. Iam ex poſteriore fit,

$$\frac{dz}{d\theta} = -c\,\text{coſ.}\,\theta - 2Z + \alpha,$$

hinque prior aequatio prodibit

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} + Z = (C - 2c)\,\text{coſ.}\,\theta + 2\alpha.$$

Cum autem noſtro caſu ſit $C - 2c = 0$, habebimus

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} + Z = 2\alpha.$$

Hinc ſi vt hactenus ponatur $Z = v\,\text{coſ.}\,\theta$, erit

$$\frac{ddv}{d\theta^2}\,\text{coſ.}\,\theta - \frac{2dv}{d\theta}\,\text{ſin.}\,\theta = 2\alpha,$$

et integrando

$$\frac{dv}{d\theta}\,\text{coſ.}\,\theta^2 = 2\alpha\,\text{ſin.}\,\theta + \beta, \quad \text{vnde colligitur}$$

$$dv = \frac{2\alpha\,d\theta\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2} + \frac{\beta\,d\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2},$$

hincque porro

$$v = \frac{2\alpha}{\text{coſ.}\,\theta} + \beta\,\text{tang.}\,\theta + \gamma,$$

conſequenter

$$Z = 2\alpha + \beta\,\text{ſin.}\,\theta + \gamma\,\text{coſ.}\,\theta, \quad \text{ex quo porro fit}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -c\,\text{coſ.}\,\theta - 3\alpha - 2\beta\,\text{ſin.}\,\theta + 2\gamma\,\text{coſ.}\,\theta,$$

vnde reperitur

$$z = -c\,\text{ſin.}\,\theta - 3\alpha\theta + 2\beta\,\text{coſ.}\,\theta - 2\gamma\,\text{ſin.}\,\theta + \delta.$$

§. 28. Cum hic motum medium rite conſtitutum eſſe aſſumamus, neceſſe eſt vt ſit $\alpha = 0$, tum vero etiam debet eſſe $\delta = 0$. Quod autem ad conſtantes β et γ attinet, quia etiam Aphelium rite conſtitutum aſſumimus, debet etiam

etiam eſſe $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, ſicque valores noſtri quaeſiti erunt

$$Z = 0 \text{ et } z = -c \text{ ſin. } \theta = +\tfrac{9}{8} \text{ ſin. } \theta.$$

Hic autem probe obſeruaſſe iuuabit, ſi non fuiſſet $C - 2c = 0$, ad terminos fuiſſe peruentum, qui ipſum angulum θ continuiſſent, quos nullo modo per conſtantes tollere licuiſſet. Hoc ſcilicet caſu motus Planetae verus non ad medium reuocari potuiſſet; vnde iſta conditio $C - 2c = 0$ neceſſario in natura rei eſt fundata, atque etiam in ſequentibus ordinibus, quoties Sinus et Coſinus anguli ſimplicis θ occurrunt, ſemper neceſſario euadere debet $C = 2c$, indeque ſemper erit $Z = 0$ et $z = -c \text{ ſin. } \theta$.

§. 29. Pro terminis autem poſterioribus, angulum 3θ inuoluentibus, formulae ſupra datae tuto adhiberi poſſunt: erit enim

$$n = 3,\ C = \tfrac{75}{4} \text{ et } c = \tfrac{39}{8}, \text{ vnde fit } F = -\tfrac{3}{8} \text{ et } f = -\tfrac{7}{24},$$

quocirca ex hoc ordine nanciſcimur ſequentes determinationes:

$$R = -\tfrac{3}{8} \text{ coſ. } 3\theta \text{ et } r = +\tfrac{9}{8} \text{ ſin. } \theta - \tfrac{7}{24} \text{ ſin. } 3\theta.$$

Reſolutio aequationum quarti ordinis,

§. 30. Binae huius ordinis aequationes ita ſe habent:

$$\text{I. } \frac{ddS}{d\theta^2} - \frac{2ds}{d\theta} - 3S = \left.\begin{matrix} -6PR - 3QQ + 3pr + 3qq \\ +6ppQ + 12PPQ - 12pq \\ -5P^4 + 15ppPP - \tfrac{15}{8}p^4 \end{matrix}\right\} = M$$

 II.

$$\text{II. } \frac{dds}{d\theta^2} + \frac{2\,ds}{d\theta} = \left.\begin{array}{l} 3pR + 3qQ + 3rP \\ -12pPQ - 6qPP + \frac{9}{2}ppq \\ +10pP^3 - \frac{15}{2}p^3P \end{array}\right\} = \text{N}.$$

Hic ſinguli termini, vt haſtenus factum eſt, euoluantur, ac pro priore quidem aequatione reperietur:

$$PR = -\tfrac{3}{16}\,\text{coſ.}\,2\theta - \tfrac{3}{16}\,\text{coſ.}\,4\theta, \quad QQ = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\theta + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4\theta,$$

$$pr = -\tfrac{9}{8} + \tfrac{17}{12}\,\text{coſ.}\,2\theta - \tfrac{7}{24}\,\text{coſ.}\,4\theta, \quad qq = \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{32}\,\text{coſ.}\,4\theta,$$

$$ppQ = -\tfrac{3}{2} + 2\,\text{coſ.}\,2\theta - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,4\theta, \quad PPQ = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4\theta,$$

$$pqP = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4\theta, \quad P^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\theta + \tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4\theta,$$

$$ppPP = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,4\theta, \quad p^4 = 6 - 8\,\text{coſ.}\,2\theta + 2\,\text{coſ.}\,4\theta,$$

vnde colligitur:

$$\text{M} = -\tfrac{1221}{8} + \tfrac{251}{8}\,\text{coſ.}\,2\theta - \tfrac{963}{64}\,\text{coſ.}\,4\theta.$$

Pro altera vero aequatione erit

$$pR = -\tfrac{3}{8}\,\text{ſin.}\,2\theta + \tfrac{3}{8}\,\text{ſin.}\,4\theta, \quad qQ = -\tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,2\theta + \tfrac{1}{16}\,\text{ſin.}\,4\theta,$$

$$rP = +\tfrac{5}{12}\,\text{ſin.}\,2\theta - \tfrac{7}{48}\,\text{ſin.}\,4\theta, \quad pPQ = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\theta - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,4\theta,$$

$$qPP = \tfrac{1}{8}\,\text{ſin.}\,2\theta + \tfrac{1}{16}\,\text{ſin.}\,4\theta, \quad ppq = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\theta - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,4\theta,$$

$$pP^3 = -\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\theta - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,4\theta, \quad p^3P = -2\,\text{ſin.}\,2\theta + \text{ſin.}\,4\theta.$$

vnde colligitur

$$\text{N} = \tfrac{21}{4}\,\text{ſin.}\,2\theta - \tfrac{61}{8}\,\text{ſin.}\,4\theta.$$

§. 30. Hic igitur occurrunt tres partes, quarum prima eſt conſtans, ſecunda vero angulo 2θ et tertia angulo 4θ affecta. Pro prima igitur parte erit

$$C = -\tfrac{1221}{8}, \quad c = 0 \text{ et } n = 0,$$

vnde, quemadmodum in ordine ſecundo iam vidimus, colligitur

$$Z = -\tfrac{1}{3}C = +\tfrac{407}{8} \text{ et } z = 0.$$

Porro

Porro pro ſecunda parte eſt

$n = 2$, $C = \frac{251}{8}$ et $c = \frac{21}{4}$, vnde fit

$$F = \frac{2c - 2C}{6} = \frac{c - C}{3} = -\frac{209}{24} \text{ et } f = -F - \frac{c}{4} = \frac{355}{48}.$$

Pro tertia tandem parte, vbi

$n = 4$, $C = -\frac{963}{64}$ et $c = -\frac{61}{8}$, erit

$$F = \frac{2c - 4C}{60} = \frac{c - 2C}{30} = +\frac{719}{960}, \text{ hincque}$$

$$f = -\frac{F}{2} - \frac{c}{16} = \frac{49}{480},$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus

$$S = \frac{407}{8} - \frac{209}{24} \operatorname{coſ.} 2\theta + \frac{719}{960} \operatorname{coſ.} 4\theta,$$

$$s = \frac{355}{48} \operatorname{ſin.} 2\theta + \frac{49}{480} \operatorname{ſin.} 4\theta.$$

§. 31. Nimis longum foret huiusmodi calculos pro ordinibus ſuperioribus exſequi, praecipue cum motus Planetarum primariorum iam aliunde ſatis ſit cognitus, atque hic inſtitutum noſtrum in eo tantum verſetur, vt ſpecimen huius nouae methodi tradamus. Omiſſis igitur ſequentibus ordinibus pro binis noſtris incognitis x et y ſequentes conſecuti ſumus valores:

$$x = e \operatorname{coſ} \theta + ee\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ.} 2\theta\right) - \tfrac{3}{8} e^3 \operatorname{coſ.} 3\theta$$
$$+ e^4\left(\tfrac{407}{8} - \tfrac{209}{24} \operatorname{coſ.} 2\theta + \tfrac{719}{960} \operatorname{coſ.} 4\theta\right)$$

$$y = -2e \operatorname{ſin.} \theta + \tfrac{1}{4} ee \operatorname{ſin.} 2\theta + e^3\left(\tfrac{9}{8} \operatorname{ſin.} \theta - \tfrac{7}{24} \operatorname{ſin.} 3\theta\right)$$
$$+ e^4\left(\tfrac{355}{48} \operatorname{ſin.} 2\theta + \tfrac{49}{480} \operatorname{ſin.} 4\theta\right),$$

§. 31. Inuentis autem his valoribus x et y innoteſcet angulus M S P, qui vocatur aequatio centri Planetae, quae ſi ponatur $= \omega$, erit longitudo Planetae vera

$$= \Upsilon S P = \zeta + \omega;$$

vbi ζ denotat longitudinem Planetae mediam. Pro aequatio-

quatione autem centri ω, ob

$$Sq = a(1+x) \text{ et } Pq = ay, \text{ erit tang. } \omega = \frac{y}{1+x};$$

denique ex ipſa hac aequatione ω colligetur diſtantia Planetae a Sole

$$SP = \frac{a(1+x)}{\cos.\,\omega} = a(1+x)\ \text{ſec.}\ \omega,$$

vbi a deſignat diſtantiam Planetae mediam a Sole.

§. 32. Pro Planetis quidem primariis neutiquam conſultum foret eiusmodi tabulas conſtruere, quae pro ſingulis anomaliis mediis exhiberent valores litterarum x et y, cum tabularum conſuetarum ope totum negotium multo facilius expediri queat. Verum ſi perturbationes, quas Planetae ob actionem mutuam ſibi inferunt, inueſtigare voluerimus, tum iſtam methodum, etſi per ſe non parum moleſtam, pari ſucceſſu applicare licebit, dum contra aliae methodi ob ſummam integrationum difficultatem vix in vſum vocari poſſunt. Huius igitur methodi vis potiſſimum in eo conſiſtit, quod in ſingulis ordinibus, quos conſtituimus, negotium integrationis mira facilitate expediri poteſt, id quod in hac diſſertatione inprimis oſtendere mihi erat propoſitum, quo facilius noua theoria mea motuum lunarium diiudicari poſſit, quandoquidem ea tota iſti artificio inuititur.

DE ECLIPSI SOLIS
ANNO 1778
DIE 24 IVNII ST. NOV. OBSERVATA.

Auctore
A. I. LEXELL.

§. 1.

Quum huius Eclipſis in plurimis atque valde diſſitis locis inſtitutae ſint obſeruationes, magnum hinc ſubſidium adfertur, ſiue pro detegendis, ſeu confirmandis differentiis Meridianorum inter loca, in quibus hae obſeruationes factae habentur. Inter illas vero praecipuum locum tuetur Petropolitana, quod per hanc correctio Latitudinis Lunae ex Tabulis deſumtae, exactius quam ex aliis quibuscunque determinari queat; quamobrem antequam ad reliquas obſeruationes progredior, in vſum Aſtronomorum breuem expoſitionem meae circa hanc Eclipſin obſeruationis, tradere animus eſt.

§. 2. Primum igitur pro motu Penduli, diebus Eclipſin ſiue praecedentibus, ſeu ſequentibus inſtitutae ſunt obſeruationes:

Die

		Temp. Pend.
Die 19 Iunii, Meridies verus		$0^h. 9'. 56'', 6$
22	- - -	0. 11. 29, 5
27	- - -	0. 14. 11, 1

Quare quum pro his diebus ſint pro momentis meridierum aequationes temporis

$$+ 48'', 2; + 1'. 27'', 1; + 2'. 30'', 6,$$

fiet acceleratio Penduli inter 19 et 22 Iunii interuallo 24 horarum $18'', 0$, tumque inter 22 et 27 Iunii, pro eodem temporis interuallo $19'', 6$, medium harum determinationum eſſet $18'', 8$. Verum quum ex aliis obſeruationibus conſtet, determinationes pro diebus 19 et 22 Iunii maiorem mereri fidem quam illam pro 27 Iunii, accelerationem ſupponamus $18'', 5$, qua poſita fiet pro Meridie die 24 Iulii, tempus Penduli $0^h. 12'. 32'', 3$, hincque pro tempore principalium obſeruationum initii et finis huius Eclipſis, Tempus Penduli anteuertet tempus verum $12'. 40''$ et $12'. 41''$.

§. 3. Iſta autem momenta commemorata ſecundum meam obſeruationem, ita habentur aſſignata:

	Temp. Pend.	Temp. vero
Initium Eclipſis	$6^h. 13'. 47''$	$6^h. 1'. 7''$
Finis - -	7. 5. 26	6. 52. 45

Praeter has vero, circa diſtantias cornuum ſequentes Micrometro obiectiuo inſtitutae ſunt obſeruationes:

Temp.

Temp. Pend.		Temp. vero		Diſt. corn.
6^h. 25'. 26''	-	6^h. 12'. 46''	-	12'. 28''
27. 45	-	15. 5	-	13. 37
29. 13	-	16. 33	-	14. 10
31. 13	-	18. 33	-	15. 4
32. 27	-	19. 47	-	15. 14
35. 41	-	23. 1	-	15. 38$\frac{1}{2}$
36. 59	-	24. 19	-	15. 47
40. 35	-	27. 54	-	15. 43
41. 48	-	29. 7	-	15. 34
44. 55	-	32. 14	-	15. 12
49. 14	-	36. 23	-	14. 12

Sunt vero pleracque iſtarum valde dubiae, quod ſtatim ac Eclipſis inchoauerat Sol nubibus obtegeretur, quae tamen ad finem vergente Eclipſi magis magisque diſpellebantur, ita vt felici ſucceſſu momentum Finis obſeruare licuerit

§. 4. Antequam nos accingere liceat ad recenſendas concluſiones ſiue ex his, ſeu ex aliis obſeruationibus deductas, primum ipſa Elementa calculi ex Tabulis Aſtronomicis deducta adponere conueniet, vt eo tutior fides noſtris calculis haberi queat.

Elementa ex Tabulis Aſtronomicis deducta, pro Eclipſi Solis A. 1778 d. 24 Iunii.

	Temp. medio Pariſ.	
	$3^h. 38'$.	$4^b. 38'$.
Long. ☉ =	$3^s. 3^{\circ}. 3'. 32''$	$3^s. 3^{\circ}. 5'. 55''$
Aſc. ☉ =	93. 20. 4	93. 22. 38
Longit. ☽ =	3. 2. 57. 50	3. 3. 35. 26
Lat. ☽ =	$18'. 45'',1$	$22'. 14'',0$
Mot. horar. in Longit	37. 36	
in Latit.	3. 29,3	
Mot. Solis horar.	2. 23	
Semidiam. ☉	15. 47	
Semidiam. ☽	16. 40,3	
Paralax. ☽ aequat.	61. 11,0	
Paral. ☽ — Paral. ☉	61. 2,5	

Si haec Elementa conferantur cum iſtis, quae in Ephemeridibus Berolinenſibus pro Anno 1778 reperiuntur, in plerisque quidem conſenſus adeſſe inuenietur; verum tamen pro binis Elementis, quae in computo Eclipſium inſignis ſunt momenti, haud exigua adeſt diſcrepantia. Nam in Ephemeridibus Latitudo Lunae certe $6''$ vel $7''$ iuſto maior adhibita eſt, tumque per inaduertentiam motus Lunae a Sole ibi ſtatuitur $35'. 22''$, ſumta ſcilicet differentia inter motum Lunae in orbita et motum Solis, vbi tamen differentia inter motus Lunae et Solis in Ecliptica conſiderari debuiſſet. Caeterum quum calculum pro Latitudine Lunae non modo pro binis momentis iam allegatis, ſed etiam pro ipſo tempore, quo coniunctio Solis et Lunae contigit, inſtituerim, ſine vlla haeſitatione aſſeue-

aſſeuerare auſim, determinationem in Ephemeridibus Berolinenſibus pro Latitudine Lunae allatam erroneam eſſe.

§. 5. His praecognitis ſubiungamus quoque Elementa calculi pro qualibet obſeruatione huius Eclipſis a nobis computata, quae quidem ad tria ſequentia reſtringere licebit: Parallaxin Longitudinis Lunae, Latitudinem Lunae apparentem, et Diametrum eiusdem Aſtri apparentem.

	Pro initio	Pro fine	Parall. Long	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
Petropoli	6h. 1′. 7″	- - -	29′.39,″1	28′.25,″8	16′.46,″3
		6. 52. 45	28. 36, 5	28. 5, 3	16. 44, 6
Berolini	4. 44. 50	- - -	34. 29, 1	20. 15, 1	16. 48, 0
		6. 12. 36	35. 54, 8	20. 42, 6	16. 45, 5
Manhemii	4. 23. 5	- - -	35. 42, 2	16. 43, 2	16. 50, 1
		6. 1. 28	38. 37, 1	17. 37, 1	16. 45, 8
Grenouici	3. 40. 11	- - -	30. 45, 5	16. 12, 1	16. 51, 7
		5. 25. 12	36. 30, 7	16. 35, 7	16. 47, 5
Cadix	3. 18. 53	- - -	37. 25, 7	1. 34, 0	16. 53, 1
		5. 26. 26	47. 41, 8	4. 15, 0	16. 46, 7
Coimbrae	3. 4. 17	- - -	33. 31, 8	4. 27, 0	16. 53, 6
		5. 12. 14	44. 41, 0	6. 19, 0	16. 47, 7
Stockholmiae	5. 4. 19	- - -	29. 25, 9	25. 33, 9	16. 48, 4
		6. 13. 26	29. 55, 1	25. 13, 9	16. 46, 0
Tuneti	4. 40. 21	- - -	45. 46, 3	6. 50, 0	16. 49, 0
		6. 29. 54	47. 41, 1	9. 51, 1	16. 43, 0
Maſſiliae	4. 12. 0	- - -	39. 16, 8	10. 58, 4	16. 50, 6
		6. 1. 46	43. 28, 0	12. 51, 6	16. 45, 2

	Pro initio	Pro fine	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
Nancaei	$4^h.12'.44''$	- - -	$35'.32'',2$	$15'.31'',4$	$16'.50'',6$
	- - -	$5^h.55'.31''$	39.14, 6	16.32, 1	16.46, 0
Bononiae	4.40.15	- - -	40.30, 9	13.43, 5	16.49, 0
	- - -	6.21.50	42.21, 8	15.23, 9	16.44, 3
Bruxellis	4. 3.28	- - -	33.12, 6	16.43, 7	16.50, 8
	- - -	5.42.52	37.22, 3	17.20, 9	16.46, 7
Caleti	3.48.40	- - -	31.54, 2	16.12, 8	16.51, 4
	- - -	5.31.30	37. 5, 7	16.44, 2	16.47, 2
Geneuae	4.13.56	- - -	37.25, 9	13.33, 3	16.50, 5
	- - -	5.29.26	41.14, 9	14.57, 8	16.45, 6
Haſniae	4.39.50	- - -	31.41, 2	22. 7, 2	16.49, 3
	- - -	6. 2.44	33.17, 8	22.15, 8	16.46, 1
Patauii	4.41.48	- - -	39.58, 2	14.34, 2	16.49, 2
	- - -	6.21.41	41.41, 8	16. 6, 2	16.44, 4
Piſis	4.35.58	- - -	40.47, 6	12.49, 2	16.49, 5
	- - -	6.19.28	42.59, 2	14.37, 4	16.44, 3
Mediolani	4.29. 9	- - -	39. 5, 0	13.50, 2	16.49, 8
	- - -	6.12. 3	41.45, 3	15.22, 6	16.44, 9
Hoſpitalit.	3.39.47	- - -	30.41, 8	16.13, 7	16.51, 7
Chriſti Lond.	- - -	5.25. $1\frac{1}{2}$	36.28, 5	16.36, 4	16.47, 5
Oxonii	3.33.45	- - -	29.57, 8	16. 8, 4	16.51, 9
	- - -	5.19.47	36. 8, 9	16.25, 9	16.47, 5
Leiceſtriae	3.34. 5	- - -	29.23, 0	16.51, 5	16.51, 9
	- - -	5.18.12	35.21, 8	17. 1, 2	16.47, 9
Windobonae	5. 1.40	- - -	38.49, 0	17.57, 9	16.48, 3
	- - -	6.32.49	39.13, 6	19. 1, 9	16.44, 1

Cremi-

	Pro initio.	Pro fine.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
Cremiſani	$4^h.50'.43''$	- - -	$38'.25'',6$	$17'.12''.2$	$16'.48''.8$
	- - -	$6^h.24'.56''$	39. 31, 3	18. 19, 2	16. 44, 5
Vltraiecti	4. 4. 25	- - -	32. 22, 2	17. 49, 3	16. 50, 8
	- - -	5. 43. 39	36. 20, 1	18. 16, 9	16. 46, 7
Aureaci	4. 36. 32	- - -	37. 1, 5	16. 58, 2	16. 49, 5
	- - -	6. 12. 37	39. 3, 1	17. 58, 7	16. 45, 2
Caroli coronae	4. 53. 51	- - -	31. 53, 2	23. 5, 8	16. 48, 8
	- - -	6. 12. 20	32. 48, 7	23. 5, 9	16. 45, 8
Lundae	4. 42. 27	- - -	31. 47, 7	22. 15, 8	16. 49, 2
	- - -	6. 4. 58	33. 16, 1	22. 15, 1	16. 46, 0
Pariſiis	3. 53. 20	- - -	33. 48, 4	14. 38, 8	16. 51, 3
Toloſatii	3. 52. 24	- - -	37. 16, 1	10. 1, 9	16. 51, 4
Ingolſtadii	- - -	6. 13. 56	39. 7, 2	17. 59, 9	16. 45, 2
Göttingae	- - -	6. 2. 38	36. 53, 8	19. 10, 4	16. 45, 9
Lugduni Gallor.	- - -	5. 55. 27	41. 47, 3	14. 18, 2	16. 45, 6
Gedani	- - -	6. 27. 34	34. 12, 1	22. 53, 7	16. 44, 9

§. 6. Per haec Elementa, ſi correctiones Latitudinis Lunae, ſummae Diametrorum apparentium, atque Parallaxis Lunae exprimantur per y, δ, π, ſequentes conſequemur expreſſiones pro tempore coniunctionis:

Pro Petropoli $5^h.37'.38'' + 3,48\,\delta + 3,04.y - 3,28.\pi$

$5.36.\ 4 - 3,38\,\delta - 2,92.y + 1,68.\pi$

hinc $94 + 6,86\,\delta + 5,96\,y - 4,96.\pi = 0$

Pro Berolino $4.29.36 + 2,18\,\delta + 1,35\,y - 1,86.\pi$

$4.28.39 - 2,21\,\delta - 1,40\,y + 0,05.\pi$

hinc $57 + 4,39\,\delta + 2,75\,y - 1,81.\pi = 0$

Pro

Pro Manhemio	$4^h.\ 9'.58''$	$+1,99\delta+1,02y-1,61.\pi$
	$4.\ 9.\ 2$	$-2,02\delta-1,10y-0,33.\pi$
hinc	56	$+4,01\delta+2,12y-1,28.\pi=0$
Pro Grenouico	$3.\ 36.\ 4$	$+1,96\delta+0,97y-1,43.\pi$
	$3.\ 35.\ 14$	$-1,98\delta-1,01.y-0,32.\pi$
hinc	50	$+3,94\delta+1,98.y-1,11.\pi=0$
Pro Gade	$3.\ 10.\ 42$	$+1,71\delta+0,08.y-1,07.\pi$
	$3.\ 10.\ 10$	$-1,72\delta-0,22.y-1,21.\pi$
hinc	32	$+3,43\delta+0,30.y+0,14.\pi=0$
Pro Conimbria	$3.\ 2.\ 18$	$+1,72\delta+0,23.y-1,03.\pi$
	$3.\ 1.\ 39$	$-1,74\delta-0,34.y-1,06.\pi$
hinc	39	$+3,46\delta+0,57.y+0,03.\pi=0$
Pro Stockh.	$4.\ 48.\ 36$	$+2,75\delta+2,17.y-2,44.\pi$
	$4.\ 47.\ 26$	$-2,69\delta-2,09.y+0,86.\pi$
hinc	70	$+5,44\delta+4,26.y-3,20.\pi=0$
Pro Tunete	$4.\ 16.\ 41$	$+1,74\delta+0,37.y-1,45.\pi$
	$4.\ 15.\ 54$	$-1,79\delta-0,54.y-1,00.\pi$
vnde	47	$+3,53\delta+0,91.y-0,45.\pi=0$
Pro Maſſilia	$3.\ 57.\ 26$	$+1,81\delta+0,61.y-1,41.\pi$
	$3.\ 56.\ 48$	$-1,85\delta-0,74.y-0,85.\pi$
hinc	38	$+3,66\delta+1,35.y-0,56.\pi=0$
Pro Nancaeo	$4.\ 1.\ 5$	$+1,98\delta+1,02.y-1,58.\pi$
	$4.\ 0.\ 7$	$-1,97\delta-0,99.y-6,41.\pi$
vnde	58	$+3,95\delta+2,01.y-1,17.\pi=0$
Pro Bononia	$4.\ 21.\ 36$	$+1,88\delta+0,79.y-1,58.\pi$
	$4.\ 20.\ 51$	$-1,94\delta-0,92.y-0,57.\pi$
vnde	45	$+3,82\delta+1,71.y-1,01.\pi=0$
Pro Geneva	$4.\ 0.\ 43$	$+1,87\delta+0,78.y-1,48.\pi$
	$3.\ 59.\ 55$	$-1,92\delta-0,88.y-0,56.\pi$
vnde	48	$+3,79\delta+1,66.y-0,92.\pi=0$

Pro

Pro Haſnia	$4^h.26'.40''+2,32\delta+1,57.y-1,97.\pi$
	$4.25.23-2,33\delta-1,59.y+0,30.\pi$
hinc	$77+4,65\delta+3,16.y-1,67.\pi=0$
Pro Patavio	$4.23.32+1,90\delta+0,85.y-1,60.\pi$
	$4.22.30-1,96\delta-0,97.y-0,50\pi$
hinc	$62+3,86\delta+1,82.y-1,10.\pi=0$
Pro Piſis	$4.17.34+1,85\delta+0,73.y-1,55.\pi$
	$4.16.44-1,91\delta-0,86.y-0,62\pi$
ideoque	$50+3,76\delta+1,59.y-0,93.\pi=0$
Pro Mediolano	$4.12.52+1,88\delta+0,79.y-1,53.\pi$
	$4.12.\ 4-1,93\delta-0,92.y-0,54.\pi$
hinc	$48+3,81\delta+1,71.y-0,99.\pi=0$
Pro Hoſpitalit.	$3.35.45+1,96\delta+0,97.y-1,43.\pi$
Chriſti Londini	$3.35.\ 8-1,98\delta-1,01.y-0,32.\pi$
vnde	$37+3,94\delta+1,98.y-1,11.\pi=0$
Pro Oxonio	$3.31.\ 3+1,96\delta+0,99.y-1,41.\pi$
	$3.30.18-1,97\delta-0,99.y-0,31.\pi$
hinc	$45+3,93\delta+1,96.y-1,10.\pi=0$
Pro Leiceſtria	$3.31.39+1,99\delta+1,03.y-1,43.\pi$
	$3.30.37-2,00\delta-1,04.y-0,26.\pi$
hinc	$62+3,99\delta+2,07.y-1,17.\pi=0$
Pro Windobona	$4.41.51+2,05\delta+1,13.y-1,76.\pi$
	$4.40.43-2,09\delta-1,22.y-0,22.\pi$
hinc	$68+4,14\delta+3,35.y-1,54.\pi=0$
Pro Cremiſano	$4.32.25+2,00\delta+1,06.y-1,73.\pi$
	$4.31.47-2,06\delta-1,16.y-0,26\pi$
hinc	$38+4,06\delta+2,32.y-1,47.\pi=0$
Pro Aureaco	$4.20.54+1,98\delta+1,02.y-1,66.\pi$
	$4.19.53-2,04\delta-1,13.y-0,27.\pi$
hinc	$61+4,02\delta+2,15.y-1,39.\pi=0$

Pro

Pro Carolicorona	$4^h.38'.22''+2,40\delta+1,71.y-2,12\pi$	
	$4.37.22-2,42\delta-1,72.y+0,43.\pi$	
hinc	$70+4,82\delta+3,43.y-2,55.\pi=0$	
Pro Lunda	$4.28.52+2,33\delta+1,59.y-2,00.\pi$	
	$4.27.48-2,33\delta-1,60.y+0,31.\pi$	
hinc	$64+4,66\delta+3,19.y-2,31.\pi=0$	
Pro Bruxellis	3. 54. 37 - - -	dubia
	$3.52.15-2,02\delta-1,07.y-0,28.\pi$	
Pro Calete	$3.42.35+1,97\delta+0,97.y-1,46.\pi$	
	3. 40. 45 - - -	dubia
Pro Ultrajecto	$3.55.50+2,03\delta+1,11.y-1,58.\pi$	dubia
	$3.55.50-2,06\delta-1,16.y-0,19.\pi$	
Pro Pariſiis	$3.45.26+1,91\delta+0,86.y-1,43.\pi$	ex init.
Pro Toloſatio	$3.41.49+1,79\delta+0,54.y-1,30.\pi$	ex init.
Pro Ingolſtadio	$4.21.\ 6-2,04\delta-1,13.y-0,27.\pi$	ex fine
Pro Göttinga	$4.14.58-2,10\delta-1,24.y-0,12.\pi$	ex fine
Pro Lugd. Gall.	$3.54.29-1,90\delta-0,84.y-0,46.\pi$	ex fine
Pro Gedano	$4.49.16-2,39\delta-1,68.y+0,37.\pi$	ex fine

§. 7. Quum autem pleraeque harum obſeruationum a Clariſſimis Aſtronomis Mediolanenſibus *Franciſco Reggio* et *Barnaba Oriani* ſupputatae fuerint, vbi noſtri calculi ab illis Celeb. horum Aſtronomorum diſſenſerint, duplici Methodo computos omnes inſtituimus, quibus inter ſe conſentientibus, nullum nobis ſuperfuit dubium, quin noſtris calculis fidem adhibere poſſemus. Et quod ſpeciatim attinet obſeruationem pro initio Bruxellis inſtitutam, Parallaxis Longitudinis nequaquam inueniri poterit $34'.22'',4$, quemadmodum Celeb. *Reggio* eam ſtatuit in Ephemerid. Mediolanenſ. pro Anno 1780. pag. 234, nec expreſſio pro

pro tempore coniunctionis a Celeb. *Oriani* pag. 255. allata, rite ſe habet. Idem quoque valet de obſeruatione pro fine Caleti inſtituta, vbi tamen numeri a Celeb. *Reggio*, pro Parallaxi Longitudinis allati, ſatis bene ſe habent, et tempus coniunctionis ab ipſo inuentum $3^h. 41'. 45''$. idem fere prodit, quod prodiret, ſi concluſionum noſtrarum, ex fine et initio Eclipſis deductarum medium ſumeretur. Caeterum ſi Longitudo Bruxellorum a Pariſiis ſtatuatur $8'. 7''$ et Caletis $1'. 56''$ à l'Occid., nec obſeruatio Bruxellis inſtituta pro fine Eclipſis, vel illa Caleti pro initio, omnimoda certitudine gaudent, quemadmodum ex determinationibus, pro differentia Meridianorum hinc deducendis, infra patebit.

§. 8. Si aequationes, ex concluſionibus pro tempore coniunctionis ſupra deductas, examinemus; facile patebit, coefficientes correctionum δ, y, π in ipſis tanta gaudere diſcrepantia, vt modo obſeruationibus omnimoda conſtaret fides, nulla difficultate hae correctiunculae, ſaltem proxime, determinari poſſent. Nam ſi concluſiones, ex obſeruationibus Gadeti et Conimbriae inſtitutis elicitas, conferamus cum concluſionibus, deductis ex obſeruationibus in Germania vel Anglia factis, tumque cum concluſionibus ex obſeruatione Petropolitana aut Stockholmienſi deductis, hinc binae reſultabunt aequationes, quibus quaepiam incognitarum δ, y, π exſulabit, binis reliquis manentibus, tumque earum ope binae reliquarum in numeris abſolutis exacte determinari poterant. Nam pro obſeruationibus primum commemoratis coefficientes ipſorum y, π valde ſunt exigui, pro obſeruationibus intermediis, y, π valores ſortiuntur mediocres, et in obſeruationibus, vltimo comme-

moratis, coefficientes ipſorum y et π inſignes ſatis ſunt. Vt autem hoc euidentius conſtet, rem exemplo illuſtrabimus. Conferamus nimirum inter ſe concluſiones ex obſeruationibus Gadetanis, Oxonienſibus et Petropolitanis deductae, vbi quidem, ne errores obſeruationum quidquam turbent, loco numerorum abſolutorum litteras α, β, γ introducamus. Erit igitur

$\alpha + 3,43.\delta + 0,30.y + 0,14.\pi = 0$, ex obſeruatione Gadetana.

$\beta + 3,93\delta + 1,96.y - 1,10.\pi = 0$, ex obſeruatione Oxonienſi.

$\gamma + 6,86\delta + 5,96y - 4,96.\pi = 0$, ex obſeruatione Petropolit.

Ex prima fit $\delta = -0,292.\alpha - 0,087.y - 0,041.\pi$,

ex ſecunda $\delta = -0,254.\beta - 0,498.y + 0,280.\pi$,

ex tertia $\delta = -0,146.\gamma - 0,868.y + 0,723.\pi$,

Hinc per primam et ſecundam erit:

$$0 = -0,254\beta + 0,292.\alpha - 0,411.y + 0,321.\pi,$$

per primam et tertiam:

$$0 = -0,146.\gamma + 0,292.\alpha - 0,781.y + 0,764.\pi$$

quas aequationes omnino ita comparatas eſſe inuenimus, vt ex illis y et π ſatis exacte determinari poſſent, modo in numeris abſolutis α, β, γ errores inſigniores non adſint; quod quidem pro Eclipſibus Solis vix euitari poteſt, quum initium Eclipſis rarius eadem cum exactitudine obſeruari queat, ac finis Eclipſis, quin potius errores decem vel plurium ſecundorum in his obſeruationibus ſatis eſſe ſoleant frequentes. Pro caſu autem praeſenti facile colligitur, errorem in obſeruatione Gadetana commiſſum inſignem habere influxum, ad immutandum valorem correctionis δ.

§. 9.

§. 9. Propter incertitudinem igitur circa obſeruationes, pro determinandis correctionibus δ, y, π ita procedamus, vt certas conſtituamus hypotheſes pro valore ipſius π, de quo caeteroquin, ſiue affirmatiuus, ſeu negatiuus ſit, ex aliis obſeruationibus conſtat, eum vix 3 ſcrupula ſecunda excedere poſſe. Obſeruationibus igitur Petropoli, Stockholmiae et in Hoſpitalitio Chriſti Londini inſtitutis, hunc in finem electis, aequationes pro δ, y, π erunt:

$$94 + 6,86\,\delta + 5,96.y - 4,96.\pi = 0,$$

$$70 + 5,44\,\delta + 4,26.y - 3,20.\pi = 0,$$

$$37 + 3,94\,\delta + 1,98.y - 1,11.\pi = 0.$$

Quibus ſi $\pi = 0$, ſatisfaciunt $\delta = -5''$, $y = -10''$, tum ſi $\pi = -1$, erunt $\delta = -4$, $y = -12''$, et ſi $\pi = -2$, habebimus $\delta = -3$, $y = -14$. Verum iſti valores negatiui pro π vix admitti poſſunt, quod reliquae obſeruationes in Italia, Germania et Anglia factae hinc eo magis redderentur erroneae, nec ex altera parte, valor ipſius π poſitiuus admitti poſſe videtur, ſaltem ſi binis ſcrupulis ſecundis maior ſtatuatur, quod hinc δ valorem ſortiretur nimis magnum. Quicquid autem ſit, pro numeris abſolutis, tempori coniunctionis reſpondentibus, eruendis, ſuppoſuimus $\delta = -5''$, $y = -10''$ et $\pi = 0''$, quibus poſitis erit tempus coniunctionis pro Grenouico ex initio Eclipſis $3^h\ 35'.\ 44''$ et ex fine Eclipſis $3^h.\ 35'.\ 34''$, vbi ob diſcrepantiam $10''$, ſi ſupponamus finem Eclipſis cum quadruplo maiori certitudine obſeruari poſſe, ac initium, erit verum tempus coniunctionis Solis et Lunae pro Grenouico ex hac Eclipſi $3^h.\ 35'.\ 36''$, quod momentum nobis terminum comparationis conſtituet, ad quem reliquas obſeruationes referemus.

§. 10. Nunc igitur ſequuntur tam momenta pro tempore coniunctionis, quam differentiae Meridianorum inde elicitae:

	Tempus coniunct.		Differ. Meridian. a Grenouico.
Petropoli ex initio	$5^h. 36'. 50''$	- -	$2^h. 1'. 14''$ Or.
ex fine	5. 36. 50	- -	2. 1. 14
Berolini ex initio	4. 29. 12	- -	53. 36
ex fine	4. 29. 4	- -	53. 28
Manhemii ex initio	4. 9. 38	- -	34. 2
ex fine	4. 9. 23	- -	33. 47
Gade ex initio	3. 10. 33	- -	25. 3 Occ.
ex fine	3. 10. 21	- -	25. 15
Conimbriae ex initio	3. 2. 7	- -	33. 29
ex fine	3. 1. 51	- -	33. 45
Stockholmiae ex initio	4. 48. 1	- -	1. 12. 25 Or.
ex fine	4. 48. 0	- -	1. 12. 24
Tuneti ex initio	4. 16. 29	- -	40. 53 Or.
ex fine	4. 16. 8	- -	40. 32
Maſſiliae ex initio	3. 57. 11	- -	21 35
ex fine	3. 57. 5	- -	21. 29
Nancaei ex initio	4. 0. 45	- -	25. 9
ex fine	4. 0. 27	- -	24. 51
Bononiae ex initio	4. 21. 19	- -	43. 43
ex fine	4. 21. 11	- -	45. 35
Bruxellis ex fine	3. 52. 36	- -	17. 0
Caleti ex initio	3. 42. 15	- -	6. 39
Geneuae ex initio	4. 0. 25	- -	24. 49
ex fine	4. 0. 13	- -	24. 37
Hafniae ex initio	4. 26. 13	- -	50. 37
ex fine	4. 25. 51	- -	50. 15

Pa-

	Tempus coniunct.		Differ. Meridian. a Grenouico.
Pataui ex initio	4^h. 23.$'$ 14$''$	- -	47$'$. 38$''$ Or.
ex fine	4. 22. 50	- -	47. 14
Piſis ex initio	4. 17. 17	- -	41. 42
ex fine	4. 17. 2	- -	41. 27
Mediolani ex initio	4. 12. 35	- -	36. 59
ex fine	4. 12. 23	- -	36. 45
Hoſpitalit. Chriſti	3. 35. 25	- -	11 Occ.
ex fine	3. 35. 28	- -	8
Oxonii ex initio	3. 30. 43	- -	4. 53
ex fine	3. 30. 38	- -	4. 58
Leiceſtriae ex initio	3. 31. 19	- -	4. 17
ex fine	3. 30. 57	- -	4. 39
Windobonae ex initio	4. 41. 29	- -	1^h. 5. 43 Or.
ex fine	4. 41. 6	- -	1. 5. 30
Cremiſani ex initio	4. 32. 4	- -	56. 28
ex fine	4. 32. 9	- -	56. 33
Vltraiecti ex fine	3. 56. 11	- -	20. 35 Or.
Aureaci ex initio	4. 20. 34	- -	44. 58
ex fine	4. 20. 15	- -	44. 39
Carolicoronae ex initio	4. 38. 3	- -	1. 2. 27
ex fine	4. 37. 51	- -	1. 2. 15
Lundae ex initio	4. 28. 25	- -	52. 49
ex fine	4. 28. 16	- -	52. 40
Pariſiis ex initio	3. 45. 8	- -	9. 32
Toloſatii ex initio	3. 41. 35	- -	5. 59
Ingolſtadii ex fine	4. 21. 27	- -	45. 51
Göttingae ex fine	4. 15. 21	- -	39. 45
Lugduni Gallor. ex fine	3. 54. 47	- -	19. 11
Gedani ex fine	4. 49. 45	- -	1. 14. 9

Sin vero potius placuerit concluſiones, ex initio Eclipſis deductas, cum concluſione ex initio Grenouici obſeruato comparare, differentiae Meridianorum pro locis a Grenouico verſus Orientem ſitis diminuentur 8'', pro locis vero occidentalioribus totidem ſecundis augerentur.

§. 11. Si cui videretur nos in fauorem obſeruationis Stockholmienſis et Petropolitanae, reliquas magis iuſto erroneas reddidiſſe, noſtri inſtituti rationem facile reddere licebit. Scilicet ſi qui errores obſeruationi Petropolitanae ineſſent, illi eiusmodi ſunt, vt vix vllam prae ſe ferant veriſimilitudinem; nam ſupponendum eſſet, initium Eclipſis iuſto citius a me eſſe aſſignatum, cuius rei nulla probabilis ratio adferri poteſt. Nec quidem ſupponere licet, momentum finis iuſto tardius a me eſſe conſtitutum, tum quod huiusmodi error minus frequens eſſe ſoleat, cum etiam quia ſic ex fine Eclipſis differentia Meridianorum inter Grenouicum et Petropolin adhuc minor euaderet, ac 2^h. 1'. 14'', quam duobus vel tribus ſecundis iuſto minorem eſſe, videtur. Tum vero ſi ſupponeremus, in obſeruatione Petropolitana errorem adeſſe 5'', neque tamen hoc errore admiſſo pleraeque reliquarum obſeruationum plus quam a duo vel trium ſecundorum errore liberabuntur, vt praeter eam nonnullas adhuc dari obſeruationes, vtpote Cremisfanenſem et illam in Hoſpitalitio St. Chriſti inſtitutam, quae potius arguerent, durationem Eclipſis Petropoli iuſto breuius fuiſſe obſeruatam. His igitur de cauſſis exiſtimamus, noſtras determinationes, ſi non prorſus exactas eſſe, ſaltem haud longe a veritate abludere poſſe.

§. 12.

§. 12. Vt autem eo magis confirmentur, quoque haud abs re erit, vt illas expreſſiones pro tempore coniunctionis inter ſe conferamus, in quibus coefficientes ipſorum δ, y, π, tam prope conueniant, vt ex eorum diſcrepantia non niſi error vnius vel alterius pro differentia Meridianorum oriri queat.

	Tempus conj. ex initio	Diff. Merid. a Grenouico.
Grenouici	$3^h.36'.\ 4''+1\ 96.\delta+0,97.y-1,43.\pi$	
Manhemii	$4.\ 9.58+1,99.\delta+1,02.y-1,61.\pi$	33'.54''Or.
Nancaei	$4.\ 1.\ 5+1,98.\delta+1,02.y-1,58.\pi$	25. 1
Caleti	$3.42.35+1,97.\delta+0,97\,y-1,46.\pi$	6.31
Oxonii	$3.31.\ 3+1,96.\delta+0,97.y-1.41.\pi$	5. 1 Occ
Leiceſtriae	$3.31.39+1,99.\delta+1,03.y-1,43.\pi$	4.25
Windobonae	$4.41.51+2,05.\delta+1,13.y-1,76.\pi$	1. 5.47 Or.
Cremiſani	$4.32.25+2,00.\delta+1,06.y-1,73.\pi$	56.21
Aureaci	$4.20.54+1.98.\delta+1,02.y-1,66.\pi$	44.50
Pariſiis	$3.45.26+1,94.\delta+0,86.y-1,43.\pi$	9.22
Bononiae	$4.21.36+1,88.\delta+0,79.y-1,58.\pi$	Diff. Merid.
		a Bononia.
Geneuae	$4.\ 0.43+1,87.\delta+0,78.y-1,48.\pi$	20'.53''Oc.
Pataüii	$4.23,32+1,90.\delta+0,85.y-1,60.\pi$	1.56 Or.
Piſis	$4.17,34+1,85.\delta+0,73.y-1,55.\pi$	4. 2 Occ.
Mediolani	$4.12,52+1,88.\delta+0,79.y-1,53.\pi$	8.44 Occ.
		Diff. Merid.
		inter Gades
Gade	$3.10,42+1,71.\delta+0,08.y-1,07.\pi$	et Conim.
Conimbriae	$3.\ 2,18+1,72.\delta+0,23.y-1,03.\pi$	8'. 24''Oc.
		inter Maſſil.
Maſſiliae	$3.57,26+1,81.\delta+0,61.y-1.41.\pi$	et Tunetum
Tuneti	$4.16,41+1,74.\delta+0,37.y-1,45.\pi$	19'.15''Or.

Bero-

Tempus conj. ex initio		Diff. Merid. a Grenouico.
Berolini	$4^h.29',36''+2,18.\delta+1,35.y-1,86.\pi$	a Berolino.
Hafniae	$4.\ 26.\ 40\ +2,32.\delta+1,57.y-1,97.\pi$	$2'.56''$Occ.
Lundae	$4.\ 28.\ 52\ +2,33.\delta+1,59.y-2,00.\pi$	44
		a Lunda.
Caroli cor.	$4.\ 38.\ 32\ +2,40.\delta+1,71.y-2,12.\pi$	9. 40
Maſſiliae	$3.\ 57.\ 26\ +1,81.\delta+0,61.y-1,41.\pi$	a Maſſilia.
Toloſatii	$3.\ 41.\ 49\ +1,79.\delta+0,54.y-1,30.\pi$	15. 37

§. 13. Simili ratione pro fine Eclipſis habebimus:

Tempus coniunct.		Diff. Merid. a Grenouico.
Grenouici	$3^h.35'.14''-1,98.\delta-1,01.y-0,32.\pi$	
Manhemii	$4.\ 9.\ 2\ -2,02.\delta-1,10.y-0,33.\pi$	$33'.48''$ Or.
Nancaei	$4.\ 0.\ 7\ -1,97.\delta-0,99.y-0,41.\pi$	24. 53
Bononiae	$4.\ 20\ 51\ -1,94.\delta-0,92.y-0,57.\pi$	45. 37
Bruxellis	$3.\ 52.\ 15\ -2,02.\delta-1,07.y-0,28.\pi$	17. 1
Patauii	$4.\ 22.\ 30\ -1,96.\delta-0,97.y-0,50.\pi$	47. 16
Mediolani	$4.\ 12.\ 4\ -1,93.\delta-0,92.y-0,54.\pi$	36. 50
Oxonii	$3.\ 30.\ 18\ -1,97.\delta-0,99.y-0,31.\pi$	4. 56Occ.
Leiceſtriae	$3.\ 30.\ 37\ -2,00.\delta-1,04.y-0,26.\pi$	4. 37
Windobonae	$4.\ 40.\ 43\ -2,09.\delta-1,22.y-0,22.\pi$	$1^h.$ 5. 29 Or.
Cremifan	$4.\ 31.\ 47\ -2,06.\delta-1,16.y-0,26.\pi$	56. 33
Vltraiecti	$3.\ 55.\ 50\ -2,06.\delta-1,16.y-0,19.\pi$	20. 36
Ingolſtadii	$4.\ 21.\ 6\ -2,04.\delta-1,13.y-0,27.\pi$	45. 52 Or.

Aureaci

	Tempus coniunct.	Diff. Merid. a Grenouico.
Aureaci	$4^h.19'.53''-2{,}04.\delta-1{,}13.y-0{,}27.\pi$	$44'.39''$
		a Bononia.
Bononiae	$4.\ 20.\ 51-1{,}94.\delta-0{,}92.y-0{,}57.\pi$	
Geneuae	$3.\ 59.\ 55-1{,}92.\delta-0{,}88\ y-0{,}56.\pi$	$20'.56''$Oc.
Patauii	$4.\ 22.\ 30-1{,}96.\delta-0{,}97.y-0{,}50.\pi$	1. 39 Or.
Piſis	$4.\ 16.\ 44-1{,}91\ \delta-0{,}86.y-0{,}62.\pi$	4. 7Occ.
Mediolani	$4.\ 12.\ \ 4-1{,}93.\delta-0{,}92.y-0{,}54.\pi$	8. 47
Lugd. Gallor.	$3.\ 54.\ 29-1{,}90.\delta-0{,}84.y-0{,}46.\pi$	26. 22
		a Gade.
Gade	$3.\ 10.\ 10-1{,}72\ \delta-0{,}22.y-1{,}21.\pi$	
Conimbriae	$3.\ \ 1.\ 39-1{,}74.\delta-0{,}34.y-1{,}06.\pi$	$8'.31''$Oc.
		a Maſſilia.
Maſſiliae	$3.\ 56.\ 48-1{,}85.\delta-0{,}74.y-0{,}85.\pi$	
Tuneti	$4.\ 15.\ 54-1{,}79.\delta-0{,}54.y-1{,}00.\pi$	$19'.\ 6''$Or.
		a Berolino.
Berolini	$4.\ 28.\ 39-2{,}21.\delta-1{,}40.y+0{,}05.\pi$	
Windobonae	$4.\ 40.\ 43-2{,}09.\delta-1{,}22.y-0{,}22\ \pi$	$12'.\ 4''$Or.
Hafniae	$4.\ 25\ \ 23-2{,}33.\delta-1{,}59.y+0{,}30.\pi$	3. 16Occ.
Lundae	$4\ \ 27.\ 48-2{,}33.\delta-1{,}60.y+0.31.\pi$	0. 51Occ.
Göttingae	$4.\ 14.\ 58-2{,}10.\delta-1{,}24.y+0{,}12.\pi$	13. 41Occ.
		a Lunda
Lundae	$4.\ 27.\ 48-2{,}33.\delta-1{,}60.y+0{,}31.\pi$	
Hafniae	$4.\ 25.\ 23-2\ 33.\delta-1{,}59.y+0{,}30.\pi$	$2'.25''$Oc.
Caroli coron.	$4.\ 37\ \ 22-2.42\ \delta-1{,}72.y+0{,}43.\pi$	9. 34 Or.
Gedani	$4.\ 49.\ 16-2{,}39\ \delta-1{,}68.y+0{,}37.\pi$	21. 28 Or.

§. 14. Heic igitur ſi ſtatuatur Longitudo Bononiae a Meridiano Grenouicenſi $45'$ $25''$ Or., Longitudo Gade $25'$ $10''$ Occid., Longitudo Maſſiliae $21'.$ $29''$. Or., Lon-

gitudo Berolini 53′. 30″ item Orient., Longitudo denique Lundae 52′. 43″ Orientalis, prodibunt expreſſiones pro differentiis Meridianorum a Grenouico computatae, non multum diſcrepantes ab illis, quas iam in § 10 allegauimus, exceptis illis, quae ex obſeruationibus Bononienſibus deriuantur. Quum vero obſeruationes pro initio et fine Eclipſis, Bononiae inſtitutae, ſatis bene inter ſe conſentiant, ſi qui errores his obſeruationibus inſunt, illi praecipue deriuantur in ipſam determinationem temporis veri pro momentis obſeruationum. Caeterum pleraeque determinationes ſupra allatae cum determinationibus antea ſtabilitis ſatis bene conſentiunt, ſi obſeruationes Bruxellis et Caleti factas exceperis, in quibus vel ob hanc cauſſam criteria veritatis deſiderantur. Qui autem de hoc certior fieri voluerit, eum ablegamus ad noſtras diſſertationes de Eclipſi Solis anno 1769 et variis occultationibus fixarum Annis 1773 et 1774 obſeruatis. Denique quia pro Conimbria et Tunete, quod conſtat, non habeantur aliae obſeruationes, longitudini horum locorum ſtabiliendae inſeruientes, notare conuenit, nos cum Celeb. *Barnaba Oriani* ſuppoſuiſſe Latitudinem Conimbriae 40°. 14′, et Latitudinem Tunetis 36°. 40′.

§. 15. Quia in ſuperioribus demonſtratum eſt, veram coniunctionem Solis et Lunae ſecundum Eclipticam contingere Tempore vero Grenouicenſi 3^h. 35′. 36″, ſeu tempore medio 3^h. 37′. 29″, ideoque tempore medio Pariſino 3^h. 46′. 49″, Meridianorum differentia ſuppoſita 9′. 20″. Hoc igitur tempore

d. 24 Iunii 3^h. 46′. 49″ eſt Longit. ☉ et ☽ = 3^s. 3°. 3′. 53″ et
Latit. ☽ Bor. = 19′. 5,″8

Ideoque

Ideoque quum ex Tabulis *Mayeri* pro eodem tempore habeatur Longitudo Lunae $3^s. 3^\circ. 3'. 22''$ et Latitudo $19'. 15,''8$, colligitur correctio Longitudinis pro his Tabulis $+ 31''$ et correctio Latitudinis $- 10''$. Quod autem correctionem δ attinet, quam ſupra inuenimus $- 5''$, ſi valor pro diametro Solis $3''$ imminuatur, prouti menſurae a Celeb. *Short* requirere videntur, remanebunt adhuc $3,''5$, quibus ſiue vera ſemidiameter Lunae, ſeu etiam, propter inflexionem radiorum luminis, vel irradiationem quandam, ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae eſt diminuenda. Probe autem heic intelligendum eſt, has determinationes eatenus tantum veritati eſſe conformes, quatenus non ſolum ratio inter axin telluris et ſemidiametrum aequationis, quam nos ſuppoſuimus, locum habeat; ſed etiam quatenus adſumere liceat, diſcos Solis et Lunae plane circulares habere figuras. Nam ſi hi diſci ellipticae fuerint formae, pro aliis atque aliis obſeruationibus correctio δ alium atque alium ſortiri poterit valorem, vbi tamen, propter egregium conſenſum concluſionum ex Eclipſibus Solis deductarum, facile perſpicitur, hanc differentiam vix vnum vel alterum ſcrupulum ſecundum excedere poſſe.

§. 16. Vt vero certior fierem, quantum diuerſae hypotheſes pro figura telluris efficere valerent, calculum repetere conſtitui pro obſeruationibus Petropoli factis, ſub hypotheſi differentiae axium $\frac{1}{233}$, cum in prioribus calculis eam ſuppoſuiſſem $\frac{1}{270}$. Tum vero inueni ex obſeruato initio Eclipſis tempus coniunctionis $5^h. 57'. 32''$, et ex obſeruato fine $5^h. 36'. 13''$, quarum determinationum prior a ſupra inuenta $6''$, altera $9''$ differt, ita vt iam ae-

 quatio

quatio pro Petropoli futura eſſet: $79'' + 6,86\,\delta + 5,96\,y - 4,96\,\pi = 0$, vbi quidem, ſi $\delta = -5$, et $\pi = 0$, y non amplius eſſet niſi $-7,''5$; verum pro iſta hypotheſi haud omnino veriſimilitudine deſtituitur, valorem ipſius π aſſumi debere negatiuum, qui ſi ponatur $= -2$, valor ipſius y manebit vt ſupra. Caeterum pro iſthac hypotheſi nihil certi de correctionibus δ, y, π definire licet, priusquam calculi pro aliis obſeruationibus fuerint initi, vbi quidem obſeruare ſufficit, mutationes adeo inſignes in reliquas obſeruationes non induci, ac in Petropolitanam, ob coefficientes correctionum y, et π in reliquis obſeruationibus multo minores, ac in Petropolitana. Hunc autem laborem ſuſcipere e re non eſſe exiſtimavi, quod mihi ſufficeret, ſi correctionem Latitudinis Lunae cum exactitudine 3 vel 4 ſcrupulorum ſecundorum definiverim. Per hoc autem examen iam conſtat, nonnunquam de differentiis Meridianorum inſignes exoriri poſſe diſcrepantias, inter concluſiones ex obſeruationibus fixarum a Luna deductas, pro variis hypotheſibus figurae telluris; idque praeprimis dum quaeſtio eſt de obſeruationibus, in quibus coefficientes correctionum fuerint praemagni, hoc eſt quo magis Latitudo Lunae apparens Latitudinem alterius aſtri exceſſit, qui tamen caſus quum a caeteris facile dignoſci queant, eo ipſo certitudini concluſionum, ex his obſeruationibus deductarum, omnino vix quidquam derogabitur.

§. 17. Quamuis obſeruationes noſtrae pro diſtantiis cornuum omnino incertiores eſſent, quam vt ex illis quidquam tuto concludi poſſet, tamen experiri volui quantum a veritate aberrarent. In hunc igitur vſum calculum Parallaxium pro ſequentibus momentis inſtitui:

Temp.

Temp. vero Petropolit.	Parall. Longit. ☽	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
$6^h. 1'. 5''$	$29'. 39'',1$	$28'. 25'',8$	$16'. 46'',3$
6. 9. 42	29. 34, 7	28. 22, 9	16. 46, 1
6. 18. 18	29. 27, 8	28. 19, 7	16. 45, 8
6. 26. 54	29. 18, 6	28. 16, 4	16 45, 5
6. 35. 31	29. 6, 8	28. 13, 1	16. 45, 2
6. 44. 8	28. 52, 8	28. 9, 4	16. 44, 9
6. 52. 44	28. 36, 4	28. 5, 3	16. 44, 6

vbi quidem valores pro Parallaxi Longitudinis et Latitudine Lunae apparenti, optime inter ſe congruunt, ſiquidem differentiae ſecundae ad ſenſum conſtantes inueniantur. His igitur inuentis pro momentis obſeruationum, facili interpolatione, elementa calculi determinabuntur ſequentem in modum:

Temp vero Petrop.	Diſtant. corn.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
$6^h. 12'. 46''$	$12'. 28''$	$29'.32'',5$	$28'.21'',8$	$16'.46'',0$
15. 5	13. 37	29. 30, 7	28. 20 ,9	16.45 ,9
16. 33	14. 10	29. 29, 4	28. 20 ,1	16.45 ,9
18. 33	15. 4	29. 27, 5	28. 19 ,6	16.45 ,8
19. 47	15. 30	29. 26, 4	28. 19 ,2	16.45 ,8
23. 1	15. $38\frac{1}{2}$	29. 23, 0	28. 18 ,0	16.45 ,7
24. 19	15. 47	29. 21, 6	28. 17 ,4	16.45 ,6
27. 54	15. 43	29. 17, 4	28. 16 ,0	16.45 ,5
29. 7	15. 34	29. 15, 9	28 15 ,6	16.45 ,4
32. 14	15. 12	29. 11, 6	28. 14 ,4	16.45 ,3
36. 23	14. 12	29. 5, 2	28. 12 ,7	16.45 ,2

Verum facile patet, pleraſque harum obſeruationum ita comparatas eſſe, vt ex illis de tempore coniunctionis vix quidquam concludi queat, quum minimi errores in obſeruationibus commiſſi ad concluſiones immutandus plurimum valeant. Nihilominus determinationes ex obſeruatione ſecunda, tertia et vltima deriuatas, quippe quae correſpondentes ſunt, inter ſe comparabimus. Eſt igitur tempus coniunctionis

per ſecundam:	$5^h.39'.\ 5''+6{,}02\,\delta+5{,}76.y-5{,}55\,\pi$
per tertiam	$5.\ 39.\ \ 0+6{,}71.\delta+6{,}48.y-6{,}34\,\pi$
ex quibus medium	$5.\ 39.\ \ 3+6{,}37.\delta+6{,}12.y-5{,}95\,\pi$
Tum vero habetur	
ex vltima obſ.	$5.\ 33.\ 30-6{,}39.\delta-6{,}16.y+4{,}23\,\pi$
ideoque medium ſumendo	$5.\ 36.\ 17-0{,}01.\delta-0{,}04\,y-0{,}86\,\pi$

quae concluſio omnino rite ſe haberet, niſi in quapiam obſeruationum grauior quipiam deliteſceret error. Quum igitur ex ſuperioribus conſtet, tempus coniunctionis pro Petropoli incidere in $5^h.\ 30'.\ 50''$, facile hinc colligitur, vltimam obſeruationem errori grauiori eſſe obnoxiam. Pro correctione autem Latitudinis definienda melius quidem inſeruire poſſent obſeruationes noſtrae, modo rite ſe haberent. Igitur quum medium Eclipſis incidat in $6^h.\ 27'$ circiter Temp. Petropolitano, obſeruatio hunc in finem inſeruitura praecipue habetur octaua, pro qua eſt diſtantia apparens centrorum Solis et Lunae $1709'',4$, Latitudine Lunae exiſtente $1696'',0$, quarum differentia habetur $13'',4$, quod ſatis bene conſentit cum correctione Latitudinis ſupra allata; imprimis ſi ratio habeatur quantitatis, qua diameter Solis eſt diminuenda. Poſita enim ſemidia-

midiametro Solis 15'. 45'', 5, fiet diſtantia centrorum 1707'', 6, quae Latitudinem apparentem tantum 11'', 6 ſuperat.

§. 18. Quum calculi a Celeb. Aſtronomis Mediolanenſibus pro hac Eclipſi a noſtris nonnunquam valde diſcrepent, haud praeter rem erit, vt huius diſcrepantiae rationes explicemus. Primum igitur, ſi concluſiones a Celeb. *Reggio* inuentae pro temporibus coniunctionum, tam pulchre conſentientes inter ſe habeantur, id ipſi Methodo, qua has concluſiones elicuit, eſt tribuendum; quipque quum ſecundum eius praeſcriptum, vtramque obſervationem initii et finis Eclipſis inter ſe combinando, ex vtraque idem momentum pro tempore coniunctionis elici debet, modo calculi alias rite fuerint ſubducti. Verum hoc ipſo nihil probatur de praeſtantia talis Methodi, quin potius, meo quidem iudicio, vtramque obſeruationem ſeorſim conſiderare e re eſt, ſi alioquin quicquam certi iudicare quis voluerit de exactitudine ipſarum obſeruationum. His igitur in genere de Methodo, a Cel. *Reggio* adhibita, monitis, iam ipſius calculos propius examinemus, vbi quidem, quia omnes in cenſum vocare inutile foret, manebimus in calculo pro Mediolano.

§. 19. Hic igitur dum Parallaxes Longitudinis Lunae a Celeb. *Reggio* allatae cum noſtris ſat bene conſentiunt, in Parallaxibus Latitudinis inſignis oritur diſcrepentia. Nam pro initio Eclipſis eſt Parallaxis Latitudinis 34' 4'', 9, ideoque 23'', 6 minor, quam Celeb. *Reggio* ſtatuit; pro fine vero Eclipſis habetur Parallaxis Latitudinis 41'. 36'', 2, quae iterum 22'', 6 a determinatione Cel.

Celeb. *Reggio* differt, et huiusmodi quidem diſcrepantiae pro ſingulis obſeruationibus occurrunt, ita vt concipere non valeam, quomodo laudatus hic Aſtronomus in his Parallaxibus computandis ſit verſatus. Hoc tamen diſſenſu non obſtante, concluſiones ex calculis D. *Reggio* deductae omnino rite ſibi conſtare poterunt, quod pro Methodo ab ipſo adhibita tantum deſideretur, vt differentia in Parallaxibus Latitudinis exacte ſit aſſignata. Nec hypotheſis iſta, de diminutione ſemidiametrorum Solis et Lunae, multum in hoc negotio turbat, vtcunque gratuito et pluribus obſeruationibus refragantibus illa ſit ſuppoſita. Nam etſi pro caſu praeſenti tam inſignis valor ipſius δ pleraſque obſeruationes ad conſenſum reduceret, tamen obſtat, quod tribus obſeruationibus, Maſſiliae, Cremiſani et in Hoſpitalitio St. Chriſti inſtitutis, errores ſic inducerentur omni probabilitate deſtituti. Praeterea ex aliis obſeruationibus colligere licet, correctionem Latitudinis pro caſu praeſenti haud multum $10''$ minorem eſſe poſſe, haec autem correctio cum valore ipſius $\delta = -11''$ nequaquam conſiſtere poteſt, quum inde in obſeruationem Petropolitanam deriuaretur error $41''$, et in obſeruationem Stockholmienſem error $32''$, his praeterea erroribus omni probabilitate deſtitutis. Caeterum ſi cui placuerit examinare argumenta, quibus Celeb. *Du Séjour* diminutionem ſemidiametrorum ob inflexionem radiorum, ſtabiliuit $6'',5$, facile perſpiciet, iſta rite ſibi non conſtare, niſi de Latitudine Lunae atque Parallaxi eius omnimoda adfuerit certitudo, id eſt, ſi haec Elementa paulo aliter aſſumantur, iſtam diminutionem locum amplius non habere. Nec niſi in caſibus rarius obuenientibus, vnum vel alterum horum Elementorum independenter a reliquis definiri poteſt. Huiusmodi

iusmodi foret pro Eclipſi A. 1778 obſeruatio *Gadeti* inſtituta, quippe ex qua independenter fere a Latitudine Lunae et Parallaxi correctio δ determinaretur, quae foret $-9''$; verum ſi perpendamus initium Eclipſis rarius aeque exacte obſeruari, ac finem, ſi ſuppoſuerimus in obſeruatione initii decem tantum ſcrupulis ſecundis eſſe aberratum, et correctionem eſſe $6''$ negatiuam, pro correctione δ non amplius habetur niſi valor $-6''$. Sepoſita autem conſideratione diametri Solis, ex occultationibus fixarum a Luna concludere mihi viſus ſum, correctionem iſtam δ pro his caſibus vix $3''$ excedere poſſe. Verum quam hic locus non ſit, exactius de hac re diſquirendi, facile vnicuique permittimus, vt opinionem a ſe adoptatam ſequatur.

§. 20. Quod ad calculos Cel. *Oriani* attinet, expreſſionum pro tempore coniunctionis ab ipſo inuentarum diſcrepantia a noſtris explicatur per diuerſas hypotheſes, partim pro Latitudine Lunae, partim etiam pro figura telluris. Verum nonnunquam tamen diſſenſus reperiuntur, qui hinc explicari non poterunt. Nam, vt nihil de obſeruationibus Bruxellis et Caleti inſtitutis loquar, pro ipſa obſeruatione Mediolanenſi calculi Cel. *Oriani* vix ſibi rite conſtare poſſunt. Errorem autem inde prouenire exiſtimo, quod log ε ſuppoſitus ſit 9,9980893, qui calculo rite ſubducto habebitur $= 9,9990420$, vnde valores Parallaxium Longitudinis et Latitudinis iuſto minores prodiere. Tum vero obſeruandum, coefficientes correctionis π a Cl. *Oriani* ſuppoſitos pro initio Eclipſis rite ſe non habere; nam pro iſto momento patet, binarum partium capiendam eſſe ſummam, non vero differentiam, ſcilicet

 pars

pars ex Parallaxi Longitudinis oriunda tam pro initio, quam pro fine, habetur ſubtractiua. Caeterum nequaquam Cel. *Oriani* adſtipulari poſſumus, vbi contendit, aequationes ex hac Eclipſi elicitas prorſus ad vnam redire. Ad oculum enim patet, aequationem pro Gade ab illa pro Stockholmia valde eſſe diſcrepantem, quia in priori coefficientes ipſorum y et π valores ſortiuntur admodum exiguos.

§. 21. Pleraeque concluſionum in §. 10 allatarum egregie conueniunt cum illis, quae ex aliis obſeruationibus pro Longitudinibus locorum deductae ſunt, ideoque nouo argumento comprobant, quantum pretium tribuendum ſit obſeruationibus Eclipſium Solis, dum de differentiis Meridianorum inueſtigandis quaeſtio eſt, et ſi alicubi aliqua oriatur diſcrepantia, ea, prouti ex ratiociniis noſtris §. 12 et 13 allatis, concluditur, minime ipſi Methodo adſcribi poteſt. Sic ſi ex obſeruatione Ingolſtadienſi deducta differentia Meridianorum ab Obſeruatorio Grenouicenſi 45'. 51", 20" iuſto eſſet maior, prouti aliae obſeruationes id arguere videntur, hoc errori ipſius obſeruationis adſcribendum eſſe videtur. Similique ratione, dum Longitudines pro Bruxellis et Calete, ab antea inventis, vltra ſemiſſem minuti primi diſcrepant, id ſine dubio incertitudini ipſarum obſeruationum adſcribendum eſt. Contra vero, vbi obſeruationes exacte fuerint inſtitutae, concluſiones ex illis deductae tam bene conſentiunt, vt ſummum diſcrimen inter 5 ſcrupula ſecunda concludatur. Sic cum ex occultatione Palilicii, die 14 Aprilis 1774 Geneuae obſeruata, inueniſſemus differentiam huius loci a Meridiano Obſeruatorii Pariſini 15'. 14", vel

15'.

15′. 15″, quae iam per finem Eclipſis inuenitur 15′ 17″, vix vllum eſt dubium, quo minus iſta differentia cum numeris iam allatis re ipſa tam prope congruat, vt ſummum diſcrimen 5 ſcrupula ſecunda excedere nequeat.

§. 22. In Ephemeridibus Berolinenſibus pro Anno 1780, occurrit calculus pro occultatione Palilicii die 29 Ianuarii 1776, Manhemii et Pariſiis obſeruata, per quem Cel. *Bode* concluſit, differentiam Meridianorum inter Obſeruatorium Pariſinum et Manhemienſe, eſſe 24′. 24″. Eundem calculum repetenti mihi concluſiones ab illis, quas inuenerat Cel. *Bode*, aliquantulum diuerſae ſe obtulerunt, quas heic exponam. Inueni igitur tempus coniunctionis pro Pariſiis,

ex immerſione: $11^h. 31'. 5'' + 1{,}89\,\delta + 0{,}27.y - 0{,}99.\pi$,
ex emerſione: $11.\ 31.\ 7 - 1{,}88.\delta - 0{,}12.y - 1{,}51.\pi$,

tumque pro Manhemia,

ex immerſione: $11.\ 55.\ 34 + 1{,}88\,\delta + 0{,}10\,y - 1{,}34.\pi$,
ex emerſione: $11.\ 55.\ 24 - 1{,}88.\delta + 0{,}07.y - 1{,}39\,\pi$,

Hinc ex immerſione colligitur differentia Meridianorum 24. 29″ et ex emerſione 24′. 17″, quae concluſiones a ſupra inuentis haud multum diſſentiunt. Quod ad Longitudinem Obſeruatorii Piſis inſtituti attinet, illa quoque egregie per hanc Eclipſin confirmatur. Nam cum ex fine Eclipſis Solis, Anno 1769 obſeruatae, inueniſſemus huius loci Longitudinem 32′. 4″, a Meridiano Pariſino, illa per praeſentem Eclipſin inuenitur 32′. 7″.

SVPPLEMENTVM AD DISSERTATIONEM, DE ECLIPSI SOLIS ANNO 1778 OBSERVATA.

Auctore

A. LEXELL.

§. 1.

Tomo XV. Nouor. Commentariorum Methodum quandam propoſui, ex obſeruatis diſtantiis cornuum, vel partibus lucidis diſci Solis, in Eclipſibus Solis, concluſiones deducendi, quae pro determinandis differentiis Meridianorum ſatis exacte inſeruirent, modo ne ipſae obſeruationes vitio laborarent. Hanc Methodum cum poſtmodum variis exemplis illuſtrauerim, nunc quoque animus eſt eius adplicationem inſtituere ad obſeruationes circa quantitates Phaſium, Mediolani, Maſſiliae et in Hoſpitalitio Chriſti Londini, inſtitutas.

§. 2. Primum igitur ex obſeruationibus, Mediolani circa diſtantias centrorum inſtitutis, ſex priores, quae poſt inchoatam Eclipſin factae fuerunt, nec non ſex vltimae, ante finem Eclipſis, hunc in vſum eligendae fuerunt, quia ex huiusmodi obſeruationibus, quo magis a coniunctione appa-

apparente fuerint diſſitae, eo tutius de differentiis Meridianorum argumentari licet. Pro obſeruationibus igitur, poſt inchoatam Eclipſin inſtitutis, calculo Parallaxium inſtituto, inuenimus:

Temp. vero Mediol.	Paral. Longit.	Latit. ☽ app.	Diam. ☽ app.
$4^h. 29'. 9''$	$39'. 5''. 0$	$13'. 50'', 2$	$16'. 49'', 8$
4. 35. 9	39. 27, 4	13. 54, 5	16. 49, 5
4. 41. 9	39. 48, 2	13. 59, 1	16. 49, 2
4. 47. 9	40. 7, 4	14. 4, 1	16. 48, 9

hincque per interpolationem pro temporibus intermediis:

Temp. vero Mediol.	Parall. Long.	Latit. ☽ app.	Diam. ☽ app.
$4^h. 32'. 9''$	$39'. 16'', 4$	$13'. 52'', 3$	$16'. 49'', 7$
4. 38. 9	39. 38, 0	13. 56, 8	16. 49, 4
4. 44. 9	39. 58, 0	14. 1, 5	16. 49, 1

§. 3. His igitur determinatis, habebimus pro ipſis momentis obſeruatis:

Temp. vero Mediolani.	Parallaxis Longit.	Latitud. ☽ appar.	Diſtant. centr.
$4^h. 34'. 12''$	$39'. 23'', 7$	$13'. 53'', 8$	$30'. 13'', 1$
4. 38. 31	39. 39, 2	13. 57, 1	28. 8, 6
4. 41. 43	39. 49, 8	13. 59, 5	26. 49, 9
4. 43. 52	39. 57, 2	14. 1, 2	25. 48, 3
4. 46. 15	40. 4, 3	14. 3, 2	24. 55, 2
4. 48. 5	40. 10, 4	14. 4, 9	24. 0, 0

vnde calculo ſubducto inuenimus pro tempore coniunctionis has expreſſiones:

A. $4^h. 12'. 48'' + 1,92.\delta + 0,89.y - 1,61.\pi$,
B. $4. 12. 36 + 1,97.\delta + 0,98.y - 1,67.\pi$,
C. $4. 12. 52 + 1,98.\delta + 1,01.y - 1,71.\pi$,
D. $4. 12. 43 + 2,03.\delta + 1,11.y - 1,76.\pi$,
E. $4. 13. 3 + 2,07.\delta + 1,17.y - 1,80.\pi$,
F. $4. 12. 45 + 2,11.\delta + 1,25.y - 1,85.\pi$.

§. 4. Deinde pro momentis, finem Eclipſis proxime praeuertentibus, calculus Parallaxium has praebuit concluſiones:

Temp. vero Mediol.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.
$5^h. 54'. 3''$	$41'. 52'', 0$	$15'. 5'', 6$
5. 57. 3	41. 51, 9	15. 8. 5
6. 0. 3	41. 51, 5	15. 11, 4
6. 3. 3	41. 50, 6	15. 14, 1
6. 6. 3	41. 49, 2	15. 16, 9
6. 9. 3	41. 47, 4	15. 19, 7
6. 12. 3	41. 45, 3	15. 22, 6

hincque colligemus pro ipſis momentis obſeruatis:

Temp. vero Mediolani.	Parallaxis Longit.	Latitud. ☽ appar.	Diſtant. centr.
$5^h. 54'. 48''$	$41'. 52'', 0$	$15'. 6'', 4$	$23'. 58'', 3$
5. 57. 13	41. 51, 9	15. 8, 5	24. 53, 6
6. 0. 6	41. 51, 5	15. 11, 4	26. 25, 9
6. 2. 19	41. 50, 9	15. 13, 2	27. 25, 8
6. 5. 55	41. 49, 2	15. 16, 6	29. 22, 1
6. 7. 24	41. 48, 4	15. 17, 7	29. 58, 1

Calculo autem inſtituto pro momento coniunctionis ſequentes elicientur expreſſiones:

f $4^h. 11'. 45'' - 2,20\,\delta - 1,38.\,y - 0,24.\,\pi$,
e $4.\ 12.\ 13 - 2,15\,\delta - 1,31.\,y - 0,30.\,\pi$,
d $4.\ 11.\ 56 - 2,08\,\delta - 1,20.\,y - 0,37.\,\pi$,
c $4.\ 12.\ \ 9 - 2,05\,\delta - 1,14.\,y - 0,41.\,\pi$,
b $4.\ 11.\ 56 - 2,00\,\delta - 1,04.\,y - 0,47.\,\pi$,
a $4.\ 12.\ 16 - 1,98\,\delta - 1,01.\,y - 0,48.\,\pi$.

§. 5. Nunc vero ſupereſt, vt concluſiones priores eum poſterioribus combinantur, quod fiet medium ſumendo illarum concluſionum, in quibus coefficientes ipſorum δ et y, poſitiui et negatiui, fere eiusdem ſunt valoris. Sic combinando concluſiones f, F orietur expreſſio pro tempore coniunctionis, in qua δ et y vix quidquam turbare poterunt:

F. $4^h. 12'. 45'' + 2,11.\,\delta + 1,25.\,y - 1,85.\,\pi$,
f. $4.\ 11.\ 45 - 2,20.\,\delta - 1,38.\,y - 0,24.\,\pi$,
1) $4.\ 12.\ 15 - 0,05.\,\delta - 0,06.\,y - 1,04.\,\pi$.

Simili ratione ſequentes inſtituendo combinationes:

e cum F, d cum F, d cum E, d cum D, c cum E,
c cum D, c cum C, b cum D, b cum C, b cum B,
a cum C, a cum B, a cum A,

hae emergent expreſſiones pro tempore coniunctionis:

2) $4^h. 12'. 29'' - 0,02.\,\delta - 0,03.\,y - 1,07.\,\pi$,
3) $4.\ 12.\ 20 + 0,02.\,\delta + 0,02.\,y - 1,11.\,\pi$,
4) $4.\ 12.\ 29 - 0,00.\,\delta - 0,01.\,y - 1,08.\,\pi$,
5) $4.\ 12.\ 19 - 0,02.\,\delta - 0,04.\,y - 1,06.\,\pi$,
6) $4.\ 12.\ 36 + 0,01.\,\delta + 0,02.\,y - 1,10.\,\pi$,
7) $4.\ 12.\ 26 - 0,01.\,\delta - 0,02.\,y - 1,08.\,\pi$,
8) $4.\ 12.\ 30 - 0,03.\,\delta - 0,05.\,y - 1,06.\,\pi$,
9) $4.\ 12.\ 20 + 0,02.\,\delta + 0,03.\,y - 1,10.\,\pi$,

10)

10) $4^h. 12'. 25'' - 0,01.\delta - 0,02.y - 1,09.\pi$,
11) $4. 12. 16 - 0,01.\delta - 0,03.y - 1,07.\pi$,
12) $4. 12. 34 + 0,00.\delta + 0,00.y - 1,09.\pi$,
13) $4. 12. 26 - 0,01.\delta - 0,02.y - 1,07.\pi$,
14) $4. 12. 32 - 0,03.\delta - 0,06.y - 1,05.\pi$.

Ex quibus medium ſumendo colligitur tempus coniunctionis Solis et Lunae pro Mediolano: $4^h. 12'. 26'' - 1,08.\pi$. Sin vero ſimpliciter ex concluſionibus A, B, C etc. atque *a*, *b*, *c* etc. medias eliceremus, haberemus $4^h. 12'. 48''$ et $4^h. 12'. 2''$, inter quas intermedia eſt $4^h. 12'. 25''$, quae a modo inuenta non niſi ſcrupulo ſecundo differt. Caeterum quum Mediolani adhuc plures obſeruationes circa diſtantias centrorum inſtitutae fuerint, ſi earum computum inire voluiſſemus, numerum combinationum facile augere licuiſſet; verum pro noſtro inſtituto ſufficiebat illarum obſeruationum adhibuiſſe vſum, quae concluſiones certiſſimas praeberent.

§. 6. Pro obſeruationibus Maſſiliae circa partes lucidas diſci Solis, tam mox poſt inchoatam Eclipſin, quam proxime ante finem Eclipſis inſtitutis, calculus Parallaxium ſequentes praebuit concluſiones:

Temp. vero Maſſilienſi.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
$4^h. 12'. 0''$	$39'. 16'', 8$	$10'. 58'', 4$	$16'. 50'', 6$
4. 15. 0	39. 31, 0	11. 0, 7	16. 50, 5
4. 18. 0	39. 44, 8	11. 3, 1	16. 50, 4
4. 21. 0	39. 58, 2	11. 5, 6	16. 50, 2
4. 24. 0	40. 11, 2	11. 8, 1	16. 50, 1
4. 27. 0	40. 23, 8	11. 10, 7	16. 50, 0

Temp.

Temp. vero Maſſilienſi.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
$4^h. 30'. 0''$	$40'. 36'', 0$	$11'. 13'', 3$	$16'. 49'', 8$
4. 33. 0	40. 47, 8	11. 16. 0	16. 49, 6
4. 36. 0	40. 59, 2	11. 18, 7	16. 49, 5
4. 39. 0	41. 10, 2	11. 21, 5	16. 49, 3
5. 34. 46	43. 28, 0	12. 20, 8	16. 46, 6
5. 37. 46	43. 28, 6	12. 24, 3	16. 46, 4
5. 40. 46	43. 28, 8	12. 27, 7	16. 46, 3
5. 43. 46	43. 28, 6	12. 31, 1	16. 46, 2
5. 46. 46	43. 28, 0	12. 34, 6	16. 46, 0
5. 49. 46	43. 27, 0	12. 38, 0	16. 45, 8
5. 52. 46	43. 25, 5	12. 41, 4	16. 45. 7
5. 55. 46	43. 23, 6	12. 44, 8	16. 45, 5
5. 58. 46	43. 21, 3	12. 48, 2	16. 45, 3
6. 1. 46	43. 18, 5	12. 51, 6	16. 45, 2

§. 7. Hinc igitur fiet pro momentis obſeruatis:

Temp. vero Maſſilienſi.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diſtant. centr.
$4^h. 16'. 42''$	$39'. 38'', 7$	$11'. 4'', 5$	$30'. 19'', 9$
24. 8	40. 11, 7	11. 8, 9	26. 50, 9
27. 40	40. 27, 9	11. 11, 5	25. 6, 4
37. 18	41. 4, 0	11. 18, 9	20. 41, 5
40. 27	41. 15, 2	11. 23, 0	19. 25, 7

Expreſſiones vero pro tempore coniunctionis hinc elicientur iſtae:

$$3^h. 57'. 16'' + 1,83.\delta + 0,67.y - 1,45.\pi,$$
$$3. 57. 16 + 1,87.\delta + 0,78.y - 1,53.\pi,$$
$$3. 57. 1 + 1,90.\delta + 0,85.y - 1,58.\pi,$$

$3^h.\ 55'.\ 50'' + 2,04.\delta + 1,11.y - 1,75.\pi,$
$3.\ 56.\ 59 + 2,10.\delta + 1,23.y - 1,83.\pi.$

§. 8. Tum vero pro momentis verſus ſinem obſeruatis:

Temp. vero Maſſil.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.	Diſtant. centr.
5h. 35′. 32″	43′. 28″, 2	12′. 21″, 7	16′. 46″, 6	18′. 59″, 7
5. 39. 56	43. 28, 8	12. 26, 9	16. 46, 3	20. 58, 1
43. 32	43. 28, 6	12. 30, 0	16. 46, 2	22. 45, 0
45. 24	43. 28, 2	12. 33, 0	16. 46, 0	23. 40, 7
48. 22	43. 27, 3	12. 36, 9	16. 45, 8	25. 14, 0
56. 23	43. 23, 0	12. 45, 5	16. 45, 5	29. 28, 1
58. 0	43. 21, 9	12. 47, 5	16. 45, 3	30. 22, 0
59. 23	43. 20, 8	12. 48, 9	16. 45, 3	31. 8, 7
6. 1. 0	43. 19, 2	12. 50, 9	16. 45, 2	32. 4, 3

vnde expreſſiones pro tempore coniunctionis erunt:

$3^h.\ 56'.\ 54'' - 2,24.\delta - 1,46.y - 0,31.\pi,$
$3.\ 57.\ 6 - 2,12.\delta - 1,26.y - 0,43.\pi,$
$3.\ 57.\ 4 - 2,04.\delta - 1,12.y - 0,51.\pi,$
$3.\ 57.\ 8 - 2,01.\delta - 1,06.y - 0,54.\pi,$
$3.\ 57.\ 6 - 1,97.\delta - 0,99.y - 0,59.\pi,$
$3.\ 57.\ 13 - 1,89.\delta - 0,82.y - 0,69.\pi,$
$3.\ 57.\ 12 - 1,88.\delta - 0,79.y - 0,70.\pi,$
$3.\ 57.\ 10 - 1,87.\delta - 0,77.y - 0,71.\pi,$
$3.\ 57.\ 8 - 1,86.\delta - 0,75.y - 0,73.\pi.$

Concluſio media ex prioribus obſeruationibus eſt:

$3^h.\ 57'.\ 4'' + 1,95.\delta + 0,93.y - 1,63.\pi,$

et ex obſeruationibus verſus finem inſtitutis:

$3^h.\ 57'.\ 7'' - 1,99.\delta - 1,00.y - 0,58.\pi,$

hinc-

hincque concluſio inter has intermedia:

$$3^h.\ 57'.\ 6'' - 0,02.\ \delta - 0,03.\ y - 1,10.\ \pi;$$

ideoque quum pro Mediolano eſſet tempus coniunctionis $4^h.\ 12'.\ 26'' - 1,08.\ \pi$, differentia Meridianorum inter Maſſiliam et Mediolanum erit $15'.\ 20''$, quae concluſio cum illa, quam ex fine Eclipſis deduximus, intra quatuor ſcrupula ſecunda conſentit. Quod autem pro obſeruationibus Maſſiliae inſtitutis concluſiones primae cum vltimis melius congruant, ac pro Mediolanenſibus, ſine dubio inde oritur, quod pro Maſſilia correctio δ alium ſortiatur valorem ac pro Mediolano. Atque quum y ſit $= - 10''$, ſaltem proxime, valor ipſius δ pro Maſſilia habebitur $+ 5''$.

§. 9. Inter obſeruationes in Hoſpitalitio Chriſti inſtitutas pro diſtantiis cuſpidum illas ſelegimus, quae poſt inchoatam Eclipſin a $4^h.\ 0'$ vsque ad $4^h.\ 11'$ factae fuerunt, tumque tres vltimas ad finem vergente Eclipſi inſtitutas, vt earum ope momentum coniunctionis erueremus; tum vero pro determinanda Latitudine Lunae obſeruationes adhibuimus circa medium Eclipſis inſtitutas. Pro quibus obſeruationibus ratio Parallaxium ex ſequenti Tabula elucet:

Temp. vero Londin.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
4^h. 0'. 32''	32'. 23'', 1	16'. 12'', 3	16'. 51'', 0
4. 2. 32	32. 32, 0	16. 12, 4	16. 51, 0
4. 4. 32	32. 40, 7	16. 12, 5	16. 50, 9
4. 6. 32	32. 49, 5	16. 12, 7	16. 50, 8
4. 8. 32	32. 58, 0	16. 12, 9	16. 50, 8
4. 10. 32	33. 6, 3	16. 13, 1	16. 50, 7
4. 12. 32	33. 4, 6	16. 13, 3	16. 50, 6
4. 32. 32	34. 28, 6	16. 17, 4	16. 49, 8
4. 34. 32	34. 35, 1	16. 17, 9	16. 49, 7
4. 36. 32	34. 41, 4	16. 18, 4	16. 49, 6
4. 38. 32	34. 47, 7	16. 19, 0	16. 49, 5
4. 52. 32	35. 27, 1	16. 23, 6	16. 48, 9
4. 54. 32	35. 32, 1	16. 24, 3	16. 48, 8

§. 10. His praeſuppoſitis erit pro primo commemoratis momentis:

Temp. vero Londin.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.	Semiſſis Diſtant. cuſpid.
4^h. 0'. 32''	32'. 23'', 1	16'. 12'', 3	16'. 51'', 0	10'. 57'', 7
4. 2. 44	32. 33, 1	16. 12, 4	16. 51, 0	11. 20, 5
4. 3. 53	32. 37, 6	16. 12, 4	16. 50, 9	11. 35, 1
4. 6. 25	32. 49, 2	16. 12, 7	16. 50, 8	12. 0, 0
4. 7. 54	32. 55, 2	16. 12, 9	16. 50, 8	12. 13, 0
4. 9. 34	33. 2, 1	16. 13, 1	16. 50, 7	12. 30, 9
4 11. 0	33. 8, 3	16. 13, 2	16. 50, 6	12. 41, 8

vnde

vnde pro tempore coniunctionis ſequentes deducuntur expreſſiones:

$$3^h.\ 35'.\ 53'' + 2,30.\delta + 1,54.y - 1,84.\pi,$$
$$3.\ 36.\ 7 + 2,36.\delta + 1,63.y - 1,90.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 59 + 2,41.\delta + 1,70.y - 1,95.\pi,$$
$$3.\ 36.\ 0 + 2,57.\delta + 1,84.y - 2,04.\pi,$$
$$3.\ 36.\ 6 + 2,58.\delta + 1,94.y - 2,11.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 43 + 2,70.\delta + 2,10.y - 2,22.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 45 + 2,80.\delta + 2,22.y - 2,30.\pi,$$

ex quibus medium valorem ſumendo, conſequemur:

$$3^h.\ 35'.\ 56'' + 2,52.\delta + 1,89.y - 2,05.\pi.$$

Deinde pro momentis verſus finem Eclipſis habemus:

Temp. vero Londin.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.	Semiſſis Diſtant. cuſpid.
$4^h.\ 52'.\ 2''$	$35'.25'',8$	$6'\ 23'',5$	$16'.48'',9$	$13'.10'',4$
4. 52. 48	35 27, 7	16. 23. 7	16. 48, 9	13. 7, 4
4. 53. 38	35. 29, 8	16. 23, 9	16. 48, 8	13. 3, 2

hinc fiunt expreſſiones pro tempore coniunctionis:

$$3^h.\ 34'.\ 50'' - 2,84.\delta - 2,27.\delta + 0,50.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 5 - 2,81.\delta - 2,20.y + 0,46.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 16 - 2,72\,\delta - 2,12.y + 0,41.\pi,$$

vnde medio ſumto prodibit:

$$3^h.\ 35'.\ 4'' - 2,79.\delta - 2,20.y + 0,46.\pi.$$

Igitur concluſio intermedia inter illam priorem et hanc iam allatam erit:

$$3^h.\ 35'.\ 30 - 0,13.\delta - 0,15.y - 0,79.\pi.$$

 Hac-

Hacque concluſione cum illis pro Mediolano et Maſſilia comparata, fiet differentia Meridiani inter Hoſpitalit. Chriſti et Mediolanum $= 36'. 56''$, atque inter idem Hoſpitalitium et Maſſiliam $= 21'. 36''$, ratione correctionum δ, y, π plane ſepoſita. At ex obſeruatione pro fine Eclipſis, prior differentia habetur $36'. 53''$ et poſterior $21'. 37''$, ita vt maiorem conſenſum vix deſiderare liceret. Interim tamen facile largimur, obſeruationes vltimas non inter meliores eſſe habendas, et pauciores quidem numero eſſe, quam vt concluſio ex ipſis ſatis certa colligi queat. Quodſi vero obſeruationes, quae has praecedunt, ad inueſtigandum tempus coniunctionis adhiberentur, concluſiones adhuc incertiores prodirent, quod minimi errores obſeruationum in his determinationibus inſignes producant mutationes.

§. 11. Pro determinanda correctione Latitudinis, obſeruationum circa medium Eclipſis, quod tempore $4^h. 32'$ incidit, vſum adhibuimus ea ratione, vt poſtquam ex obſeruatis diſtantiis cuſpidum et cognitis ſemidiametris Solis atque Lunae diſtantias centrorum elicuerimus, illas debita reductione ad minimam diſtantiam reduxerimus. Pro iſta vero reductione inſtituenda, poſtquam ex cognitis ſemidiametris Solis et Lunae, pro initio et fine Eclipſis, nec non diſtantia minima centrorum proxime determinata, innotuerit arcus apparens, durante Eclipſi a Luna deſcriptus, hincque motus Lunae in orbita apparente, inde quoque facili negotio determinari poterunt incrementa pro diſtantia centrorum, in obſeruationibus a medio Eclipſis haud longe remotis. Concluſiones vero ex noſtris calculis deductae ſequentes habentur:

Temp.

Temp. vero.	Semiſſis Diſtant. cuſp.	Diſtant. centr.	Diſtant. minim.
$4^h.28'.\ 5''$	$13'.52'',4$	$1015'', 8$	$1005'', 3$
4. 30. 0	13. 54, 8	1008, 0	1004, 7
4. 32. 32	13. 59, 7	994, 4	994, 4
4. 34. 14	14. 0, 9	990, 1	988, 9
4. 35. 24	13. 59, 1	996, 3	992, 3
4. 36. 22	13. 59, 4	995, 1	987, 8
4. 37. 6	14. 0, 0	993, 1	984, 2
4. 37. 46	13. 59, 7	993, 9	981, 6
4. 39. 9	13. 58. 5	994, 7	973, 2

Ex his determinationibus medius valor eſt $990''$, 3, vnde quum pro diſtantia media ſit Latitudo ☽ apparens ex calculo $977''$, 4, hinc colligeretur correctio Latitudinis Lunae $- 13''$; vbi tamen facile perſpicitur, obſeruationes modo allatas vix pro tam exactis haberi poſſe, vt ex illis correctio Latitudinis ſatis exacte definiatur.

§. 12. Ex obſeruationibus vero prope medium Eclipſis Mediolani inſtitutis concluſiones aliquanto tutiores eliciuntur. Scilicet ſi ex diſtantiis centrorum pro initio et fine, quae ſunt $1955''$, 3 et $1950''$, 4, tumque ex diſtantia minima, quam proxime nouimus eſſe $338''$, quaerantur arcus ab initio et fine vsque ad medium Eclipſis deſcripti, his additis cognoſcetur motus Lunae in orbita apparente. Ex quo facili negotio eruentur quantitates, quibus diſtantia centrorum pro momentis, medio Eclipſis proximis, increſcit. Hac igitur ratione conſequemur:

Temp.

Temp. Mediol.	Diſt. centr. obſeru.	Diſtant. minima.
$5^h. 18'. 13''$	$14'. 54'', 3$	$14'. 48'', 3$
5. 21. 4	14. 48, 3	14. 48, 3
5. 25. 41	14. 51, 1	14. 44, 7

ex quibus valor medius pro diſtantia minima erit $14'. 47'', 1$. Atque pro medio Eclipſis calculus praebet Latitudinem Lunae apparentem $14'. 34'', 2$, vnde correctionem Latitudinis $- 12''$ circiter eſſe oportet. Caeterum facile intelligitur, hanc determinationem non adeo eſſe exactam, vt non vnius vel alterius ſcrupuli ſecundi correctionem admittat; quare nobis ſufficiet, hac disquiſitione correctionem Latitudinis, a nobis ſtabilitam, ſaltem proxime confirmari.

EPI-

EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXVIII. SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore
IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1778.

Menſe	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Altitudo media
	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 59	7. X. a. m.	27. 49	23. VIII. p. m. 24. X. a. m.	1. 10	28. 04	28. 09
Februar.	28. 83	11. III. p. m.	27. 03	24. VI. p. m.	1. 80	27. 93	28. 10
Mart.	28. 69	12. II. p. m.	27. 37	25. VII. a. m.	1. 32	28. 03	27. 92
April.	28. 36	7. IX. a. m.	27. 12	1. VI. a. m.	1. 24	27. 74	27. 96
Maii	28. 44	6. Meridie	27. 62	19. VI. a. m.	0. 82	28. 03	27. 95
Iunii	28. 47	14. III. a. m.	27. 57	21. med. noct.	0. 90	28. 02	28. 00
Iulii	28. 29	20. VI. a. m.	27. 65	3. IV. a. m.	0. 64	27. 97	27. 96
Auguſti	28. 45	19. VII. a. m.	27. 28	13. VI. a. m.	1. 17	27. 87	27. 91
Sept.	28. 31	20. XI. p. m.	27. 52	14. IX. p. m	0. 79	27. 91	27. 96
Octobr.	28. 42	30. XI. p. m.	26. 86	26. IV. a. m.	1. 56	27. 64	27. 74
Nouembr.	28. 65	5. veſperi	26. 92	24. III. p. m.	1. 73	27. 78	28. 05
Decembr.	28. 37	18. III. p. m.	26. 83	29. VIII p. m.	1. 54	27. 60	27. 65
Anno 1778.	28. 83	Menſe Februarii.	26. 83	Menſe Decembris.	2. 00	27. 83	27. 94

2. Nu-

2. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	ſupra 27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	11. 9	14. 21	17. 3	22. 15	25. 15	28. 07
Febr.	13. 15	14. 0	15. 18	17. 6	18. 9	28. 10
Mart.	4. 9	8. 12	11 6	17. 12	21. 15	27. 93
April.	6. 3	7 18	15. 3	17. 21	22. 12	28. 00
Maii	3. 15	8. 9	11. 3	16. 15	22. 0	27. 92
Iunii	5 0	9. 0	14. 12	19. 9	23. 18	27 99
Iulii	3. 3	6. 6	13 21	18. 9	23. 18	27. 96
Aug.	3. 6	6. 15	11. 12	16. 15	21. 0	27. 93
Sept.	2. 12	4. 12	11. 12	20. 18	25. 18	27. 93
Oct.	3 6	3. 21	4. 12	7. 0	12. 0	27. 73
Nou.	8. 12	16. 18	20. 3	22. 15	24. 18	28. 12
Dec.	1. 18	4. 12	6. 15	9 12	12. 12	27. 65
Anno 1778	66. 12	105. 0	153. 0	206 3	253. 15	27. 95

Notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros deſignare, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. verum *poſt meridiem.*

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima Barometri 28. 83: menſe Februarii die 11 hora antemeridiana X. Thermom. *Deliſl.*

liſl. 176. Coelum ſerenum. Ventus ex Occidente leniter ſpirabat.

2. Altitudo Barometri minima 26, 83: menſe Decembris, die 29 hora VIII poſt meridiem. Thermom. *Deliſl.* 154. coelum nubiloſum, auſter ſatis vehemens.

3. Variatio maxima 2 poll.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam, 27, 83.

5. Barometri altitudo media inter omnes obſeruatas, 27. 94 vel 27 $\frac{94}{100}$ poll.

6. Ex ſecunda tabula patet, mercurium in tubo Barometri ſe ſuſtentaſſe

ſupra	28, 20	poll. per dies	66$\frac{1}{2}$
	28, 10	poll. per dies	105
	28, 00	poll. per dies	153
	27, 90	poll. per dies	206$\frac{1}{8}$
	27, 80	poll. per dies	253$\frac{5}{8}$

vnde concluditur, mercurium per interuallum dimidii anni vel 182$\frac{1}{2}$ dierum, ſe ſuſtentaſſe ſupra altitudinem 27,95 vel 27 $\frac{19}{20}$ poll.

 3. De-

3. Deſcenſus et aſcenſus Barometri notabiliores.

Menſe	Tempore die	hora	Diff. hor	Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
Ian.	2.	4. a. m.	32	27. 93	+ 52	156	NW.	coelum nubilum, nebula
	3.	merid.		28. 45		160		coelum obductum.
	21.	3. a. m.	24	28. 37	— 58	181	N.	coelum ſerenum, at nebuloſ:
	21.	med. noct.		28. 20		185	—	coelum nubilum
	22.	med. noct.		27. 62		173	O.	coelum obductum
	23.	med. noct.		27. 49		172	NO. fort.	coelum ſerenum
Febr.	1.	meridie	30	28. 04	+ 66	154	NW fort.	coelum obductum
	2.	6. p. m.		28. 70		173	N.	coelum ſerenum
	23.	11. a. m.	22	27. 65	— 61	156	S.	coelum nubilum
	24.	9. a. m.		27. 04		151	SW. fort.	nix copioſa
	—	6. p. m.		27. 03		151		
Mart.	1.	6. a. m.	38	27. 51	+ 65	155	NO.	coelum obductum, nix
	2.	8. p. m.		28. 16		160	NW.	coelum obductum
	12.	6. p. m.	18	28. 68	—108	164	NW fort.	coelum ſerenum
	13.	meridie		27. 60		148	W. fort.	nix, coelum obductum.
	23.	0. a. m.	9	27. 91	— 43	166	NW.	coelum obductum et nix
	—	9. a. m.		27. 48		159		
	25.	8. a. m.	31	27. 37	+ 64	145	W. fort.	coelum obductum nix
	26.	3. p. m.		28. 01		154	NO.	—— ſerenum
	30.	0. a. m.	36	27. 94	— 65	148	SW.	coelum obductum, pluuia
	31.	meridie		27. 29		141	SW. fort.	—— obductum, pluuia
Iunii	4.	2. p. m.	20	27. 75	+ 36	126	W. fort.	coelum nubilum, pluuia copioſa et nix
	5.	10. a. m.		28. 11		124	variabl.	coelum ex parte ſerenum

Menſe

Menſe	Tempore die	hora	Diff. hor.	Dig. p.c.	Diff. p.c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
Aug.	12.	6. a. m.		27. 76		131	W. fort.	coelum nubilum, pluuia
	13.	6. a. m.	24	27. 27	− 49	133	SW.fort.	pluuia copioſa
	15.	9. a. m.	51	28. 08	+ 81	125	W. fort.	coelum ſerenum
	5.	0. a. m.		27. 82		144	NO.	coelum obductum, pluuia
	5.	8. p. m.	20	27. 30	− 52	139	SO. fort.	pluuia copioſa
Oct.	24.	6. a. m.		27. 84		153	NW.	coelum nubilum, pluuia
	26.	3. a. m.	45	26. 86	− 98	149	SW.fort.	coelum obductum
	27.	0. a. m.	21	27. 15	+ 29	156	S.	coelum ſerenum
	28.	0. a. m.	24	27. 49	+ 34	159	NW.	coelum ſerenum
	29.	0. a. m.	24	27. 87	+ 38	154	N.	coelum nubilum
	30.	0. a. m.	24	28. 19	+ 32	152	N.	coelum obductum
	31.	0. a. m.	24	28. 42	+ 23	153	W.	coelum obductum
Nou.	3.	9. a. m.		27. 80		144	SW.	coelum obductum
	3.	3. p. m.		27. 82		144	——	—— ——
	4.	meridie	21	28. 40	+ 58	144	NW.	—— ——
	5.	9. p. m.		28. 65		153	SO.fort.	coelum ſerenum
	22.	6. p. m.		28. 13		155	NWfort.	coelum obductum
	23.	2. p. m.		27. 92		162	SO. fort.	coelum nubilum, nix
	24.	3. p. m.	25	26. 92	−100	147	SW.fort.	nix, pluuia, procella
	25.	3. a. m.	12	27. 38	+ 46	164	O. fort.	coelum obductum
Dec.	7.	meridie		28. 03		170	SO. fort.	coelum nubilum
	8.	0. a. m.		27. 88		161	——	coelum obductum, procell.
	9.	meridie	36	27. 23	− 65	149	S.	coelum obductum, nix
	11.	meridie.	48	28. 21	+ 98	180	NWfort.	coelum ſerenum
	12.	med. noct.	36	27. 42	− 79	170	S.O. fort	coelum obductum, nix

Menſe

Menſe	Tempore die	hora	Diff hor	Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
Dec.	16.	meridie		27. 41		159	NO. fort.	coelum obductum, nix
	18.	3. p. m.	51	28. 37	+96	167	O.	coelum ſerenum
	19.	meridie	21	27. 82	−55	154	SW. fort.	coelum obduct. nix, procell.
	20.	meridie		27. 83		152	W.	coelum obductum
	21.	3. p. m.	27	26. 98	−85	149	W. fort.	coel. obduct. nebula, procell.
	22.	3. p. m.	24	27. 53	+55	157	W. fort.	coelum nubilum
	23.	3. a. m.	12	27. 19	−34	160	NW.	coelum obduct. nix
	23.	3. p. m.	12	27. 46	+27	165	NW.	coelum ſerenum
	24.	6. a. m.		27. 40		169	N.	coelum nubilum
	25.	2. p. m.	32	28. 05	+65	170	NW.	coelum ſerenum
	26.	8. a. m.	18	27. 54	−51	152	NW.	coelum nubilos
	28.	6. p. m.		27. 51		152	SW.	coelum nubilos
	29.	8. p. m.	26	26. 83	−68	154	S. fort.	coelum nubilos.

Signa + et − quae differentias altitudinum barometricarum praecedunt aſcenſus et deſcenſus mercurii indicant.

II. Ther-

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro ſingulis menſibus anni 1778.

Menſe.	Altitudo minima. Gr.	die	hora	Altitudo maxima. Gr.	die	hora	Diff.	Altitudo media. nocte	meridie.
Ianuar.	185	20. 22.	7. a. m.	150	10.	2. p. m.	35	170.	164.
Februar.	182	12.	7. a. m.	147	25.	2. p. m.	35	165.	157.
Mart.	179	18. 19.	6. a. m.	138	28.	2. p. m.	41	162.	152.
April.	163	5.	6. a. m.	121	25.	2. p. m.	42	150.	138.
Maii	152	7.	6. a. m.	120	17.	2. p. m.	32	141.	131.
Iunii	138	4. 6. 7.	6. a. m. 10. p. m. 6 a. m.	108	21.	2. p. m.	30	133.	121.
Iulii	136	8.	6. a. m.	107	20.	2. p. m.	29	131.	118.
Auguſt.	145	29	6. a. m.	115	6.	2. p. m.	30	134.	124.
Septembr.	144	27.	6. a. m.	124	1. 28.	2. p. m.	20	138.	130.
Octobr.	159	28.	6. a. m.	137	1. 6.	2. p. m.	22	152.	146.
Nouemb.	176	27.	6. a. m.	144	2. 3. 4.	2. p. m.	32	159.	154.
Decembr.	182	11 18	7. a. m.	148	9. 21. 28.	2. p. m. 6. a. m. 9. a. m.	34	164.	156.
Anno 1778.	185	Ianuarius.		107	Iulius.		78	149.9	141.

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigidiores Grad.					Dies calidiores Gradib.				
	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150.
Ianuar.	5	15	27	31	31					1.
Februar.	2	8	17	28	28					4.
Mart.		7	18	27	31				1	13.
April.			1	17	26			6	14	30.
Maii				3	17			14	30	31.
Iunii					0	2	10	30	30	30.
Iulii					0	5	17	30	31	31.
Auguſt.					2		5	29	31	31.
Septembr.					8			17	29	30.
Octobr.				21	31				5	25.
Nouembr.		3	14	26	30					9.
Decembr.	2	9	16	31	31					9.
Anno 1778.	9	42	93	184	235	7	32	126	171	244.

3. Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

		Dies
180 et 190	die 20. 21. 22. 26. 28. Ian., die 11. 12. Febr. et die 11. 18. Dec. - -	9.
170 et 180	die 7. 8. 12. 17. 18. 19. 23. 24. 25. 27. Ian., die 2. 6. 10. 13. 14. 15. Febr. die 12. 15. 18 — 22 Mart., die 20. 26. 27. Nouembr. et die 7. 10. 12. 13. 17. 24. 25 Decembris - -	33.

		Dies
160 et 170 die	1 — 6. 9. 13. 14. 16. 30. 31. Ian., die 1. 3. 7. 8. 9. 16 — 19. Febr., die 2. 3. 4. 9. 11. 14. 16. 17. 23. 26. 28. Mart., die 5 April., die 6. 7. 11. 12. 13. 18. 19. 21. 23. 25. 28. Novembr. et die 6. 14. 15. 16. 22. 23. 31. Decembr. - - - - -	51.

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

		Dies
110 et 100 die	16. 21. Iun. et die 19. 20 — 23 Iulii,	7.
120 et 110 die	8. 9. 10. 14. 15. 17. 18. 20. Iun., die 1. 5. 14. 15. 17. 18. 24. 26. 28 — 31. Iulii, et die 2. 4. 6. 8. 21. Auguſti - - - - - -	25.
130 et 120 die	22 — 27 Aprilis, die 1. 10. 14 — 19. 25. 26. 28 — 31. Maii, die 1 — 7. 11 12. 13. 19. 22 — 30. Iunii, die 2. 3. 4. 6. 8 — 13. 16. 25. 27. Iulii, die 1. 3 5. 7. 9 — 20. 22 — 27. 30. 31. Aug. et die 1 — 7. 11. 12. 13. 16 — 19. 24. 26. 28 Septembris - - -	94.
140 et 130 die	28. Mart. die 14 — 18. 21. 28. 30. Apr., die 2 — 5. 7. 8 9. 11. 12. 13. 20 — 24. 27. Maii, die 7 Iulii, die 28. 29. Aug., die 8. 9. 10. 14. 15. 20 — 23. 25 27. 29. Sept., et die 1. 3. 5. 6. 7. Octobris - - -	45.

Ex tabula 1ma intelligitur per totum annum fuiſſe:

1. Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 185 grad. *Delisl.* menſe Ianuarii die 20 et 22. hora antemeridiana 7^{a}. Fuit autem illa 20ma die coelum ſerenum, nebula valde ſpiſſa, vento leniter ſpirante e Septentrione: Barom. 28, 17. Hac vero die 22da coelum plane ſerenum, malacia et altitudo Barometri 28, 00.

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 107 grad. *Delisl.* menſe Iulii die 20^{a} hora poſtmeridiana ſecunda. Barometro tunc temporis momento $28\frac{1}{4}$ dig. coelo exiſtente ſereno et vento leniter flante ex Oriente.

3. Hinc variatio Thermometri maxima 78 grad. ſecundum Thermometrum *Delislianum.*

4. Frigus medium, ſeu altitudinem Thermometri mediam intra omnes mane et veſpere obſeruatas, 150 graduum: et calorem medium ſiue Thermometri altitudinem mediam intra omnes meridianas, 141 gr. At ſi menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hyemalibus Ian. — April. Nouembr. — Decembr. ſeparamus, reperimus in illis calorem medium fuiſſe $128\frac{1}{3}$ grad. et in his frigus medium $161\frac{2}{3}$ graduum.

Porro Tabula 2da oſtendit fuiſſe hoc 1778 anno, dies 184 frigidiores gradu 150, hoc eſt congelationis naturalis

turalis termino, inter quos 93 fuerunt dies, quibus frigus ſuperabat 160 gradus. In his vero numerauimus 42 dies frigidiores gradu 170 et tandem 9 dies, quibus frigus excedebat 180 grad.

Deinde patet ex eadem Tabula, hoc 1778 anno quoad calorem fuiſſe 244 dies calidiores gradu 150, et 171 calidiores gradu 140, inter quos 126 dies annotauimus, quibus calor ſuperabat gradum 130, et 32, quibus tranſibat gradum 120: denique dies 7 calidiores gradu 110.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procelloſus	Nord	N-O	Oſt	S-O	Sud	S-W	Weſt	N-W	Variabilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar	0	19	9	3	8	3	5	5	2	1	3	4	
Febr.	0	17	7	4	1	1	5	3	2	5	7	4	
Mart.	3	13	13	2	7	6	2	1	0	5	6	4	
April.	7	10	10	3	5	4	3	0	4	4	6	4	
Maii	6	9	13	3	1	4	4	1	0	7	6	6	2
Iunii	5	8	11	6	0	0	4	4	3	4	10	5	
Iulii	5	9	14	3	2	5	2	3	2	6	9	1	1
Aug.	5	13	11	2	1	2	5	0	1	8	9	5	
Sept.	5	11	9	5	1	2	4	2	7	6	3	5	
Oct.	4	16	8	3	4	8	2	2	5	4	4	2	
Nou.	4	12	13	1	0	0	9	8	4	5	0	4	
Dec.	3	7	15	6	2	1	2	5	4	3	9	5	
Anno 1778.	47	144	133	41	32	31	47	34	34	58	72	49	3

 Hinc

Hinc perſpicitur, hoc anno 1778 maxime regnaſſe Zephyrum, tum vero ventos e regionibus SW. et NW: deinde Eurum. Malaciae non raro obſeruatae fuerunt menſibus, Aprilis et Maii: procellae vero et venti vehementiores frequentius occurrunt menſibus Decembris, Iunii et Iulii.

In ſpecie autem hoc anno procellae flabant e regione.

		Dies.
NO.	die 4. 5. Maii, die 5. Iulii, et die 11 Octobris	4.
O.	die 19. Febr. et die 10. Sept. - - -	2.
SO.	die 13. Sept. - - - - - - -	1.
S.	die 23. Febr. die 22. Apr. die 23. Iulii, die 11. 28. Sept. die 25. Oct. et die 8. Decembris -	7.
SW.	die 30. Ian. die 24. 25. Febr. die 24. Martii, die 16. 23. Apr. die 29. Maii, die 3. 6. Iunii, die 13. Aug. die 29. Sept. die 21. Oct. die 24. Nov. die 12. 19. Dec. - - -	15.
W.	die 27. 31. Ian. die 13. Martii, die 1. 28. Iunii, die 25. Iulii, die 14. Aug. et die 20. 21. 27. Dec. - - - - - -	10.
NW.	die 22. 27. Iunii - - - - -	2.

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies	Quantit. aquae pluuiae. Dig. p. c.
Ianuar.	5.	11.	8.	—	14.	
Februar.	6.	16.	0.	—	10.	
Martii	7.	11.	2.	5.	13.	
Aprilis	10.	6.	7.	7.	5.	0, 47.
Maii	10.	5.	3.	15.	—	1, 60.
Iunii	12.	2.	0.	9.	—	0, 32.
Iulii	9.	7.	0.	13.	—	3, 02.
Auguſti	6.	5.	1.	17.	—	1, 44.
Septemb.	4.	8.	1.	19.	—	2, 60.
Octobr.	1.	20.	1.	13.	14.	0, 77.
Nouemb.	3.	20.	1.	4.	14.	1, 00.
Decemb.	1.	15.	3.	4.	14.	1, 02.
Anno 1778.	74.	126.	27.	106.	84.	12, 24.

Excellebant igitur quoad ſerenitatem coeli menſes Iunii, Maii et Aprilis. Frequentius pluit menſe Septembris et Auguſti et nix copioſa cecidit praeſertim menſe Ianuarii, Octobris, Nouembris et Decembris. Quantitas aquae pluuiae et niuis, a Viro Ill. *Lexell* mecum communicata, elapſo quocunque menſe ſecundum Calendarium Iulianum ſummata fuit: adeoque hae quantitates in noſtra tabula a die 12ma cuiusque menſis vsque ad 12^{mam} ſequentis pertinere intelligendae ſunt; hincque ſumma 12 dig. $\frac{24}{155}$ altitudinem indicat aquae pluuiae et niuis, quae hoc 1778 an-

anno a 12 Aprilis vsque ad diem 12 Ianuarii ſequentis anni 1779 cecidit.

V. Reliqua phaenomena.

Grando cecidit die 30 Septembris.

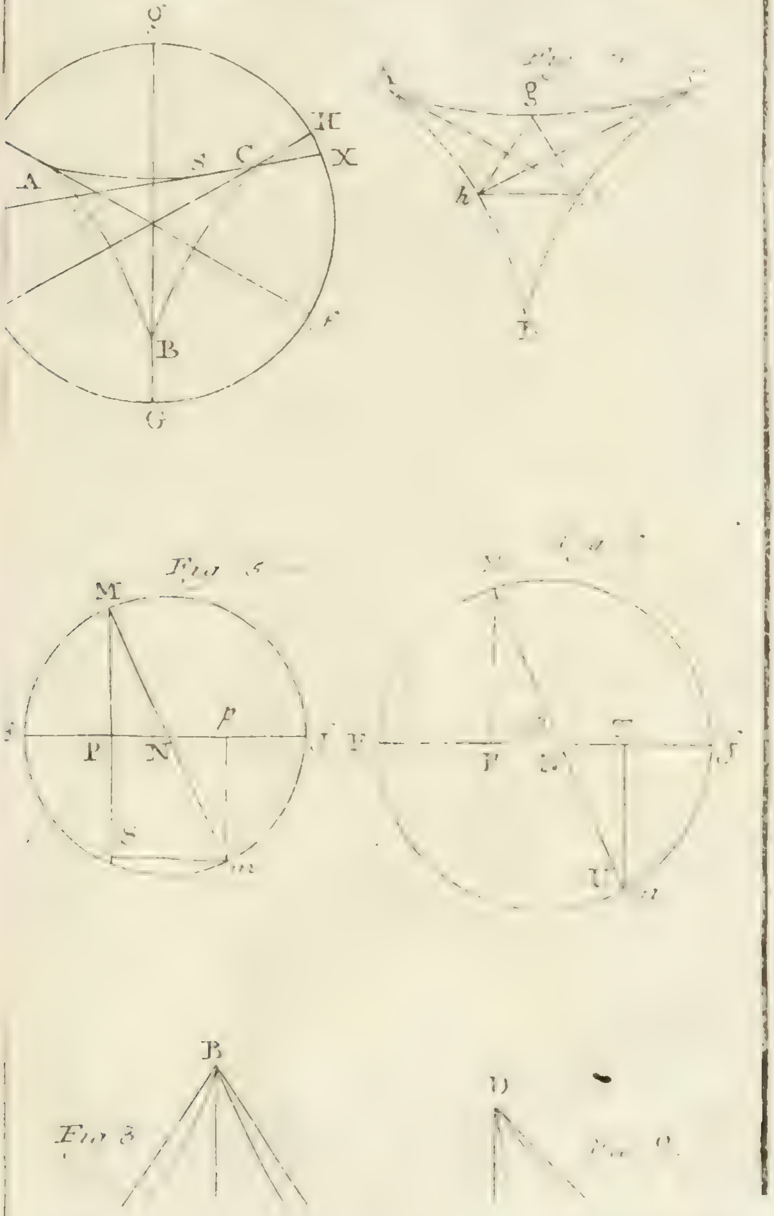
Tonuit octies: die ſcilicet 1 et 15 Maii, die 10 et 16 Iunii, die 15 et 27 Iulii, die 16 Auguſti et quidem in vicinia die 6 Auguſti.

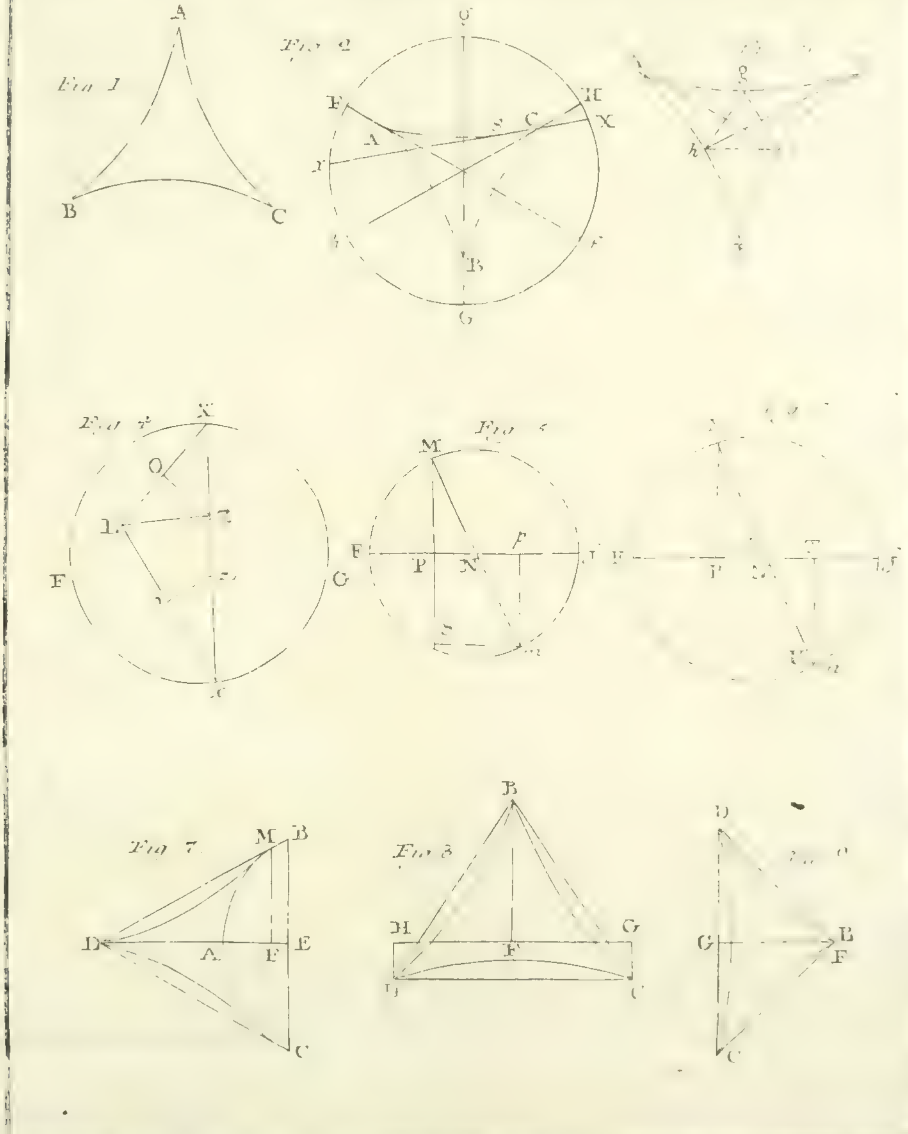
Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 30: lucidae nimirum 12, die 19 et 21 Ianuarii, die 18 Februarii, die 16. 18 et 22 Martii, die 21 et 23 Aprilis, die 28 Auguſti, die 21 et 30 Septembris et die 13 Decembris. Deinde 18 fulgentes, die 18 et 20 Ianuarii, die 17 et 25 Februarii, die 17. 26 Martii, die 10 et 15 Aprilis, die 1. 3. 12. 15. 17 et 22 Septembris, die 20 Nouembris, et die 6. 10 et 17 Decembris.

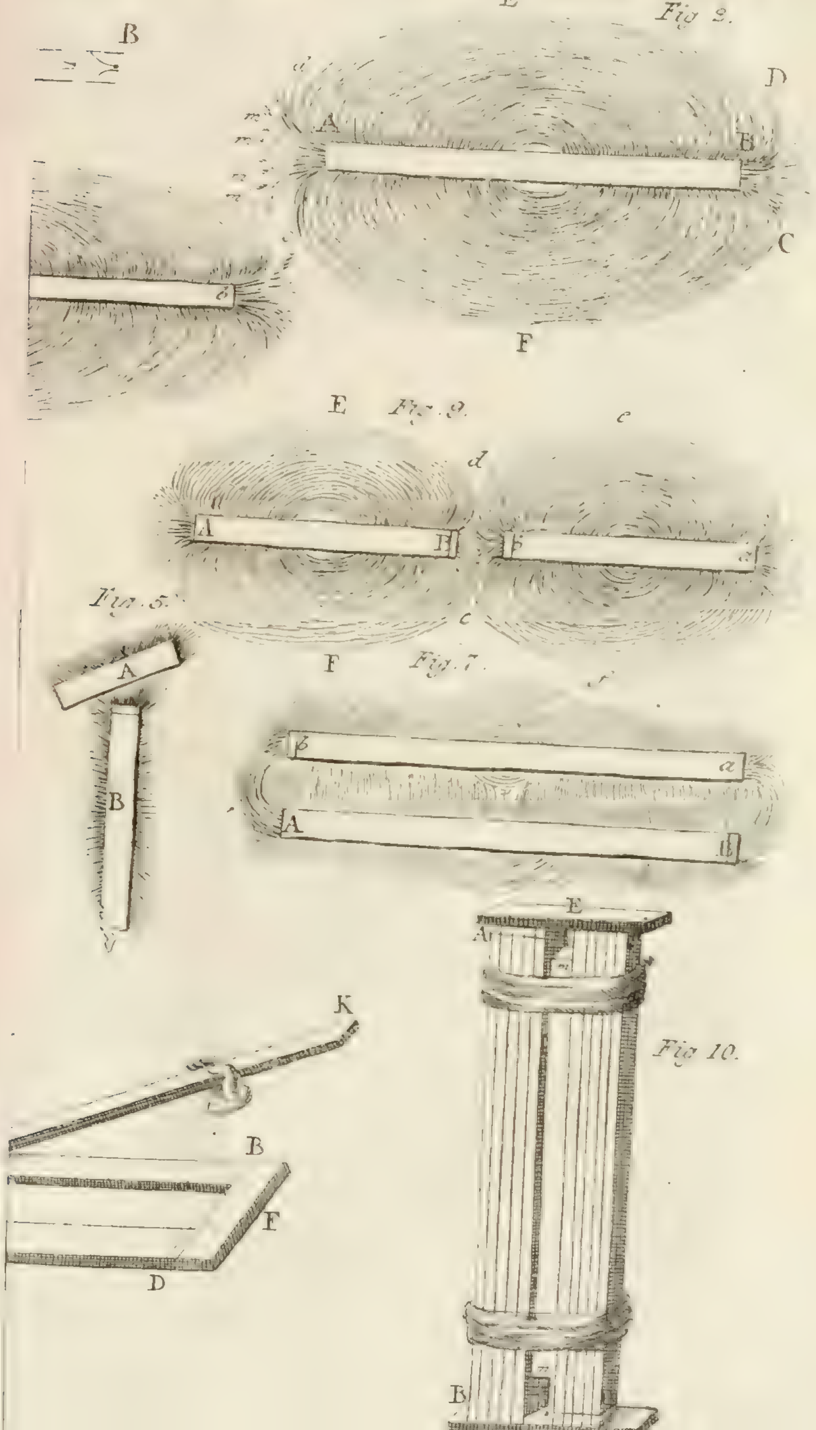
Parhelion die 16 Ianuarii.

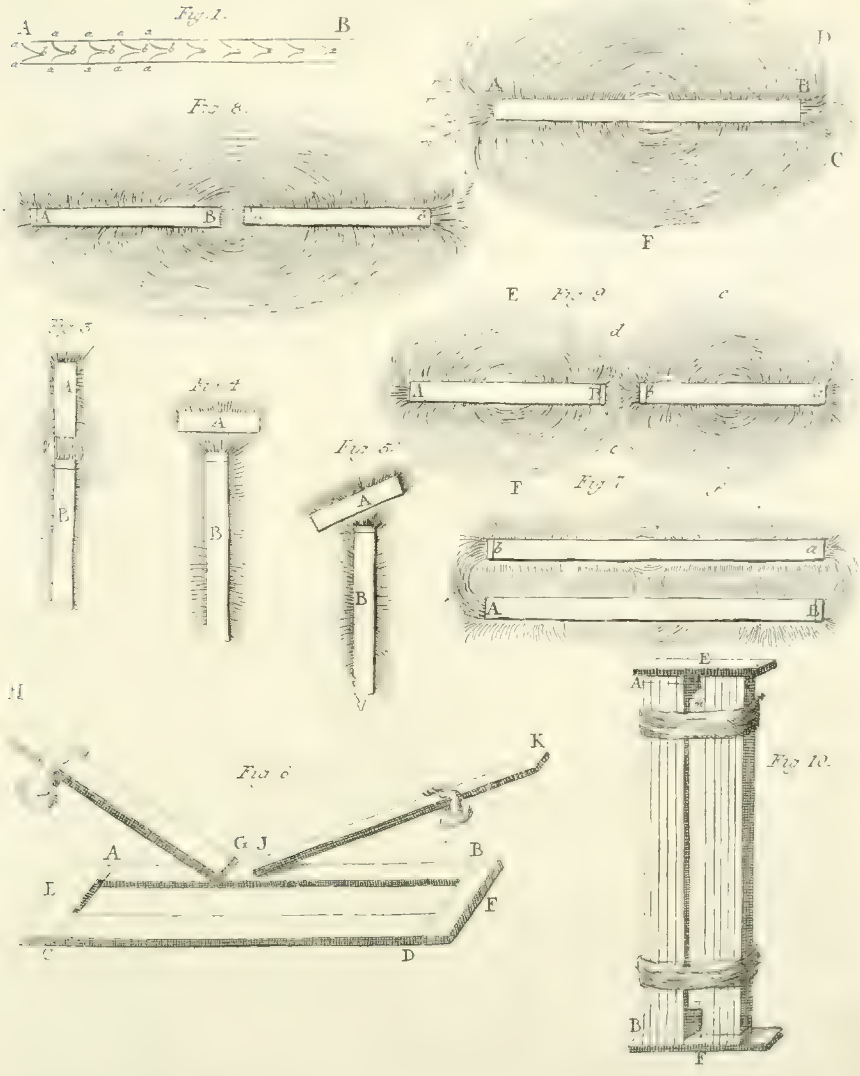
Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 18 Aprilis, poſtquam per ſpatium 142 dierum glacie obductum perſtitit. Tum vero die 13 Nouembris magna ex parte glacie obducebatur, poſtea quam ergo per 209 dies a glacie liberatum manſit.

Acta. Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. II. P. II. Tab. I




Fig. 1
A
B
C
Fig. 2
F
A
C
H
X
B
G
M
P
N
D
A
F
E
Fig. 7
Fig. 8
H
G
C




Fig. 1.
Fig. 8.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 6.
Fig. 10.

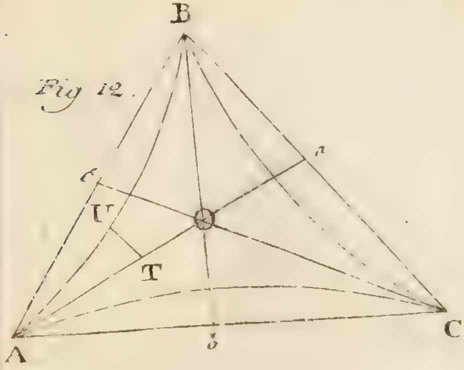


Fig 12.

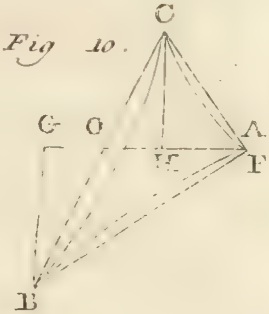


Fig 10.

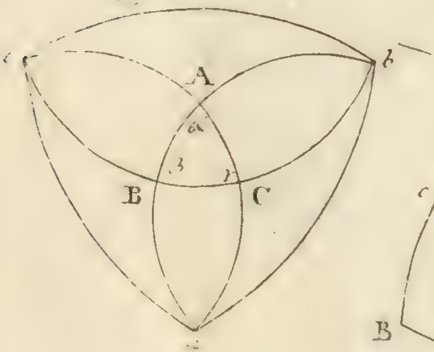


Fig 14.

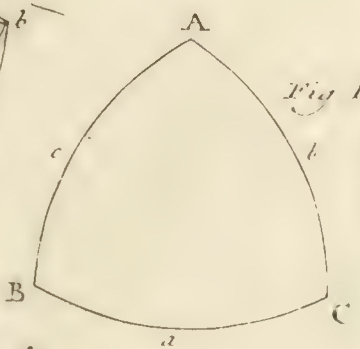


Fig 15.

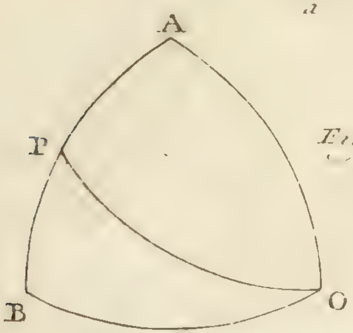


Fig 17.



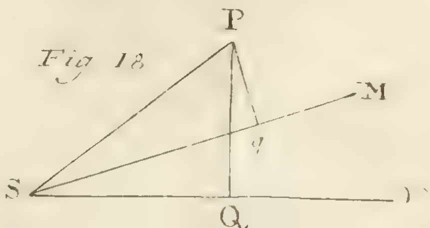


Fig 18.

Fig. 11.

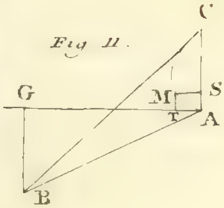


Fig. 12.

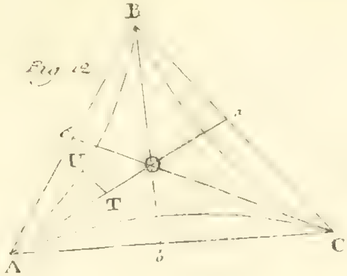


Fig. 10.

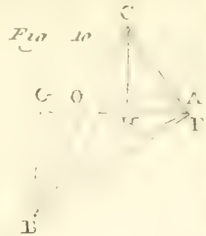


Fig. 13.

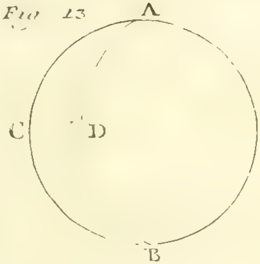


Fig. 14.

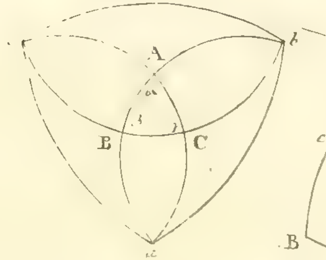


Fig. 15.

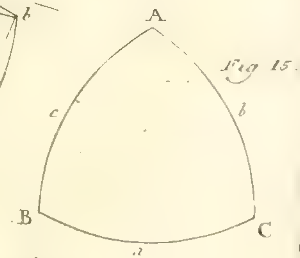


Fig. 16.

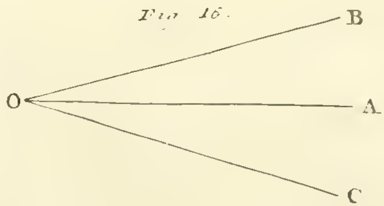


Fig. 17.

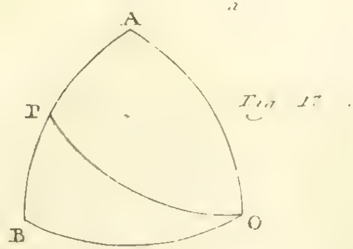
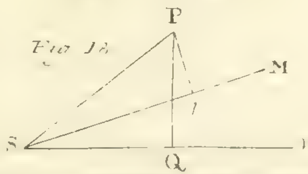


Fig. 18.



11.

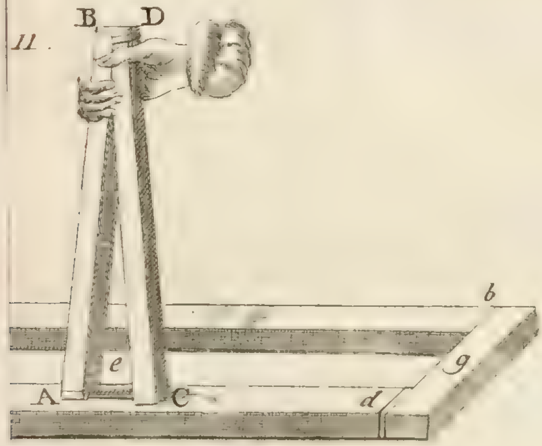


Fig. 12

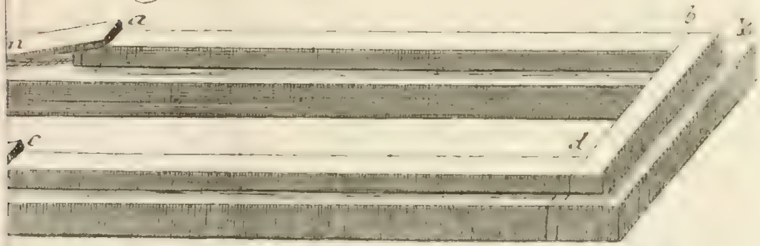


Fig. 14.

Fig. 13.

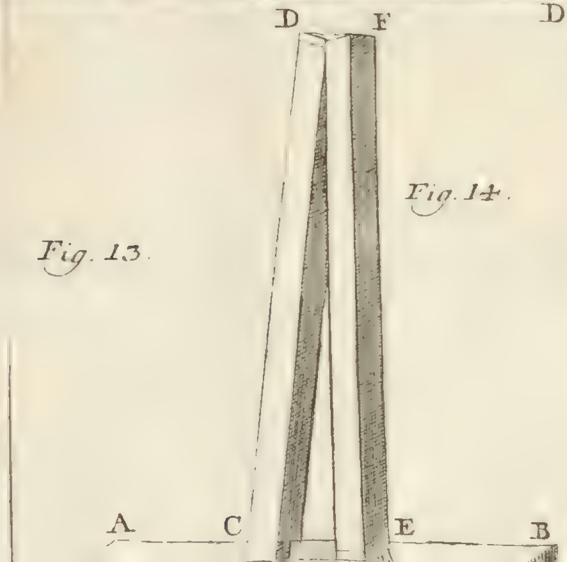


Fig. 11

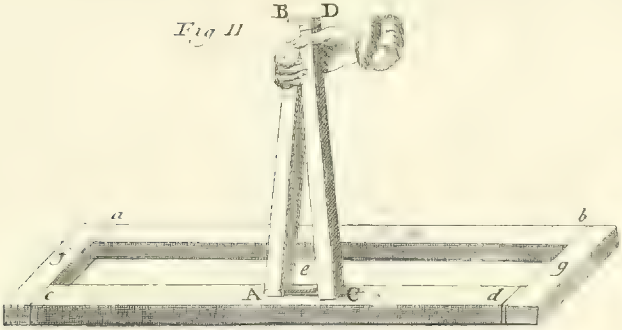


Fig. 12

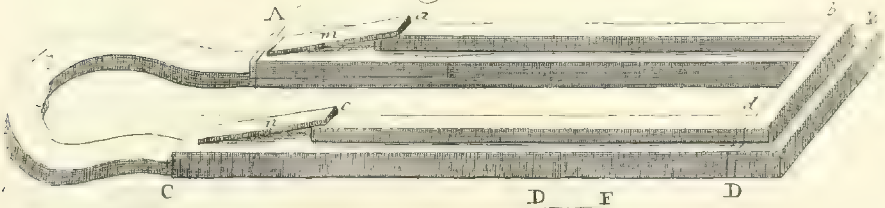




Fig. 13

Fig. 14

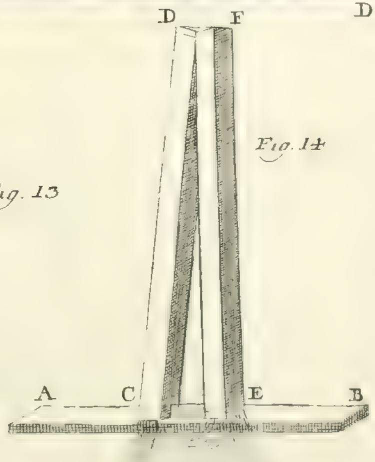
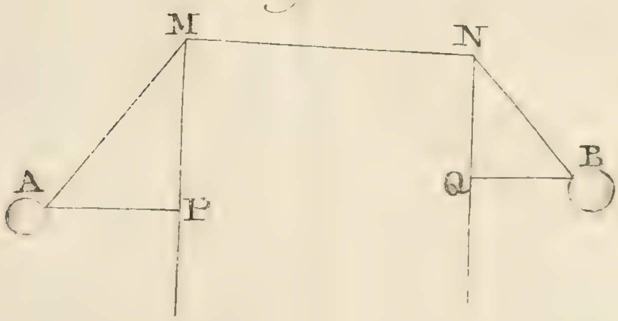


Fig. 1.



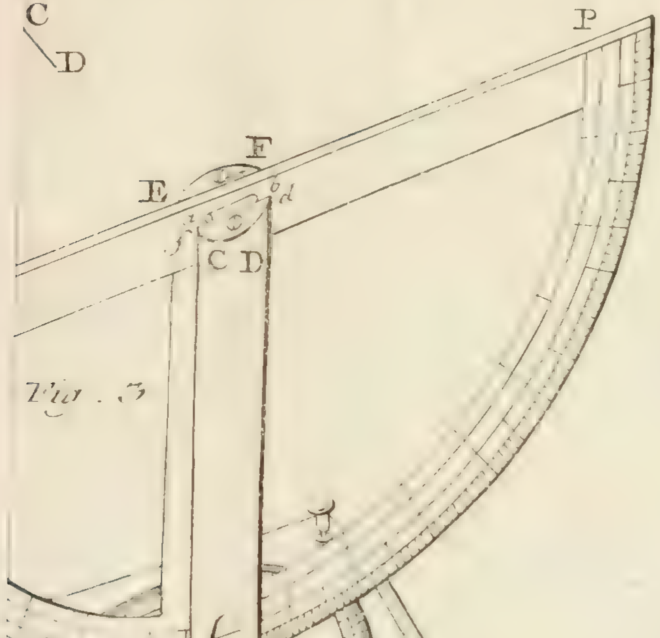
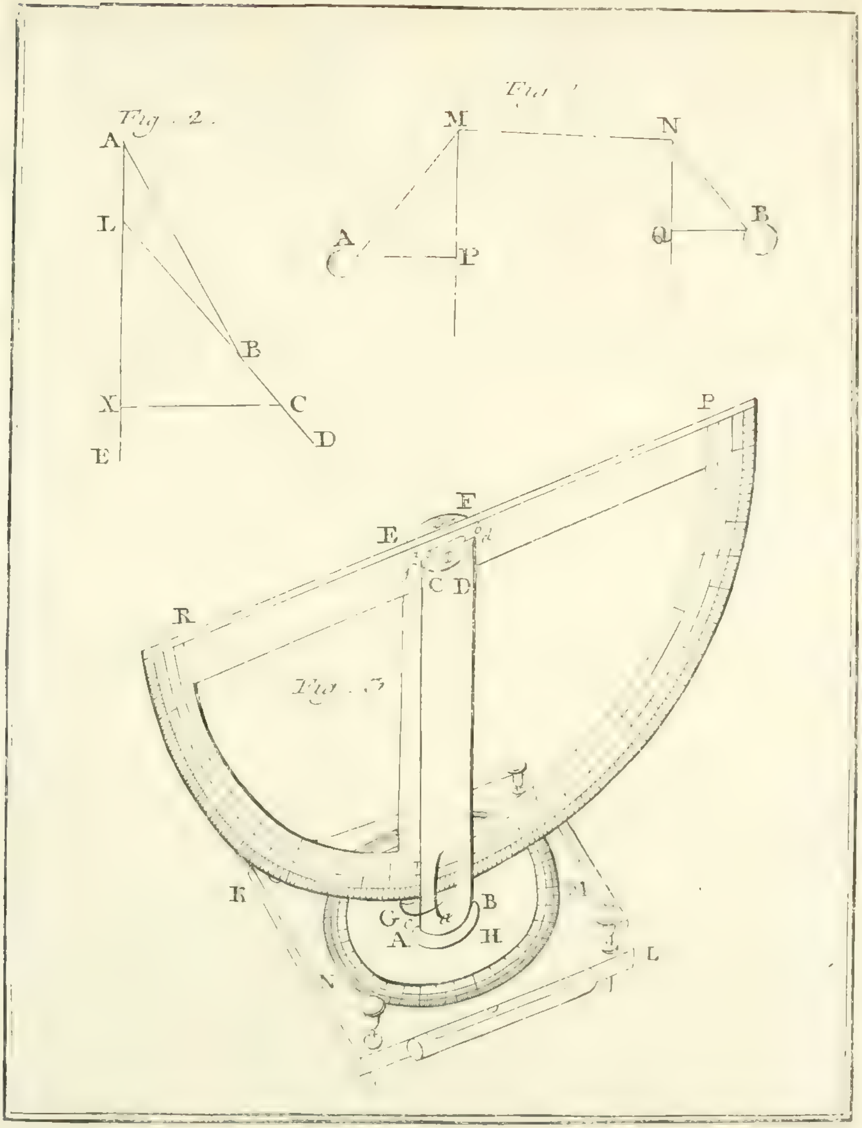
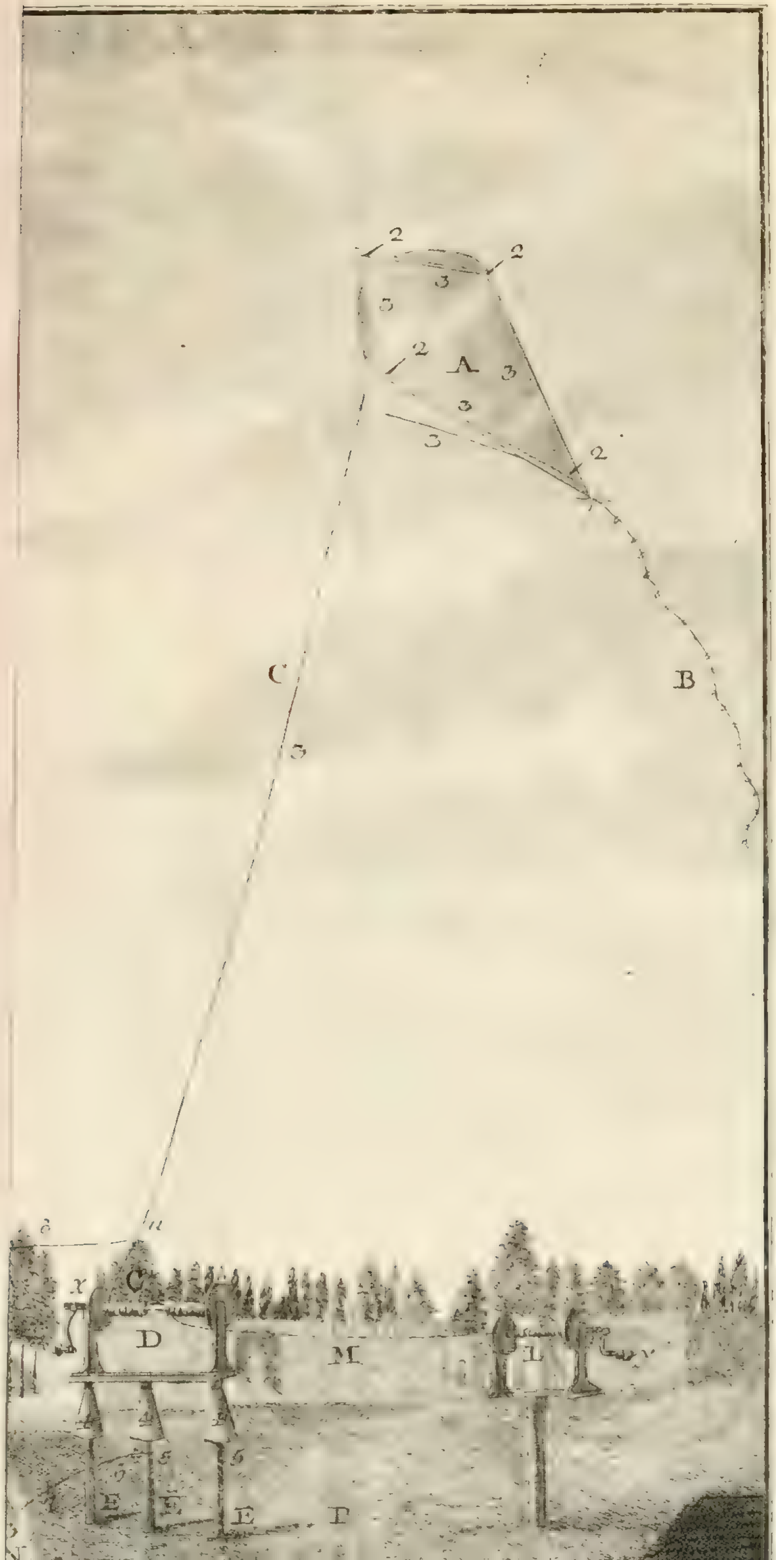
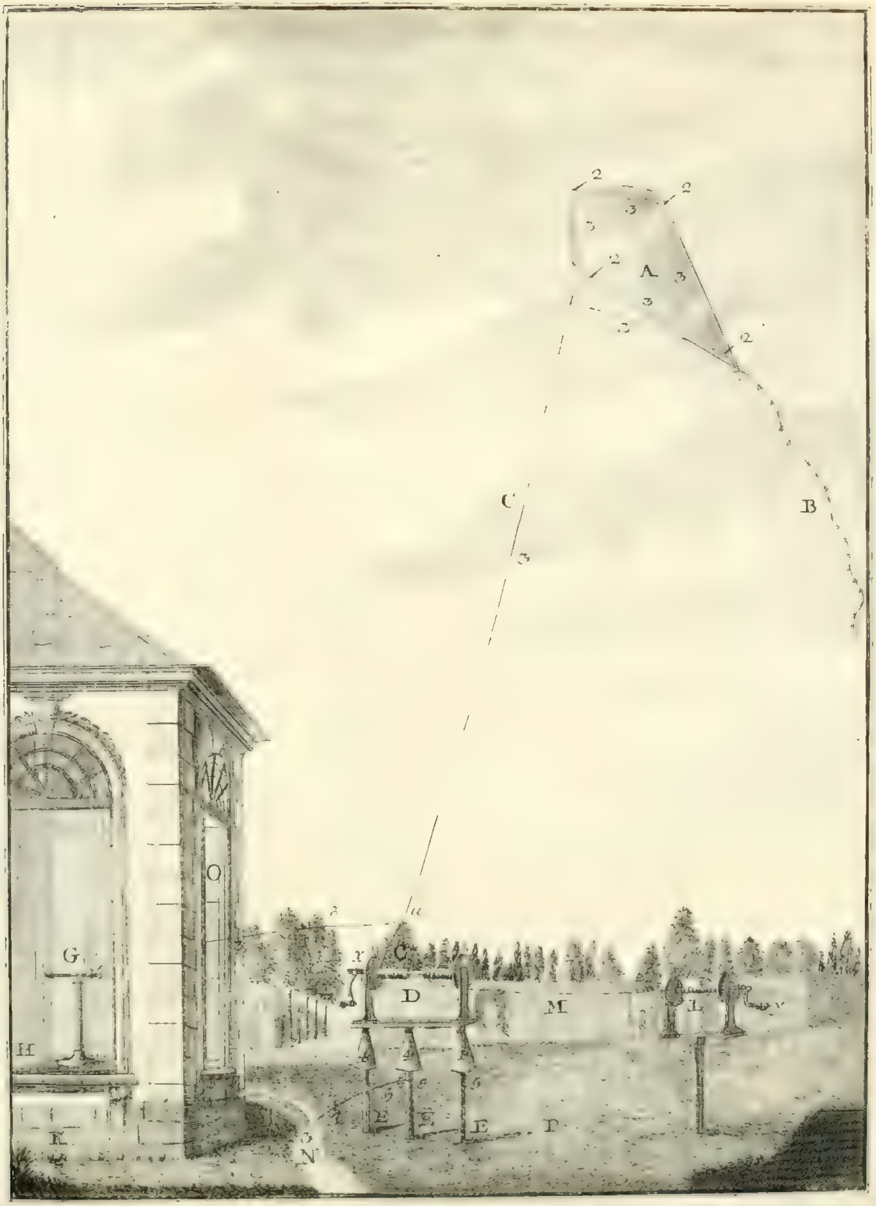
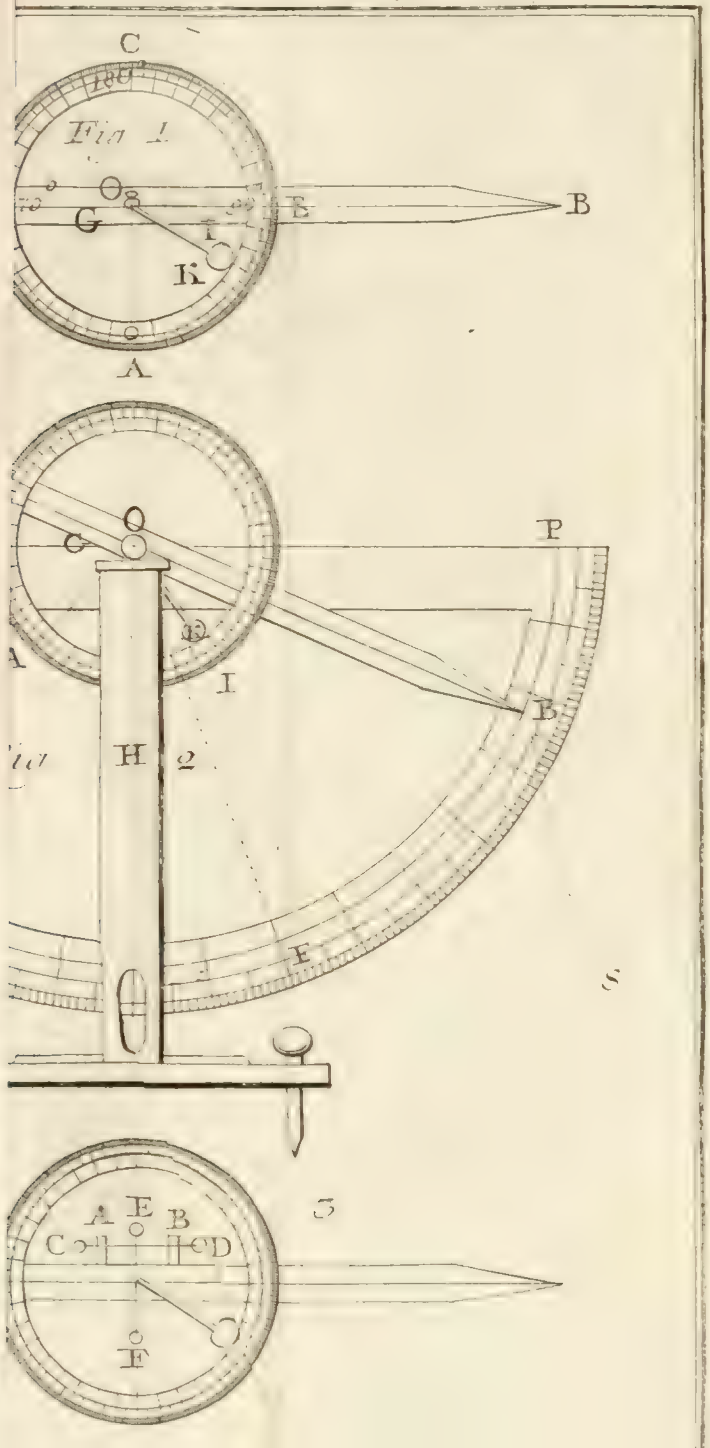


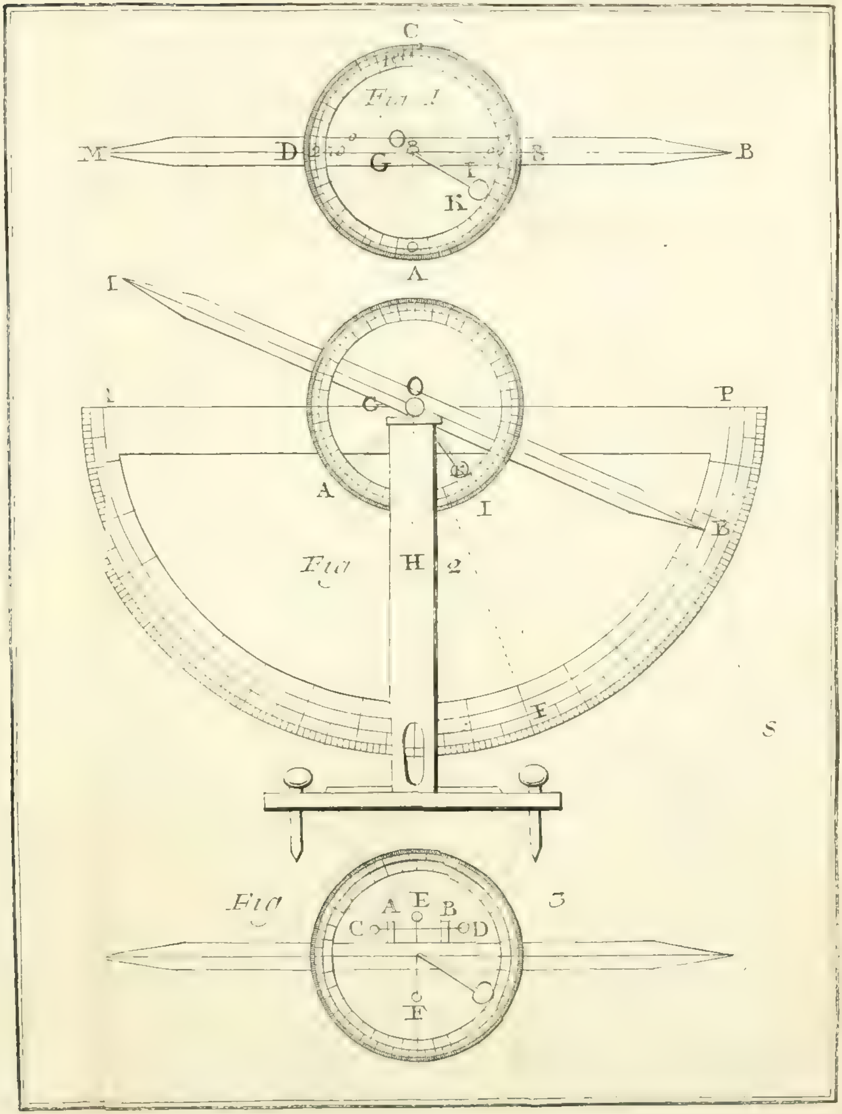
Fig. 3.


Fig. 2.
A
L
B
X
C
D
E
M
N
A
P
Q
B
P
F
E
C D
R
Fig. 3
K
G
B
A
H
L


A
B
C
D
M
L
E
E
E
F

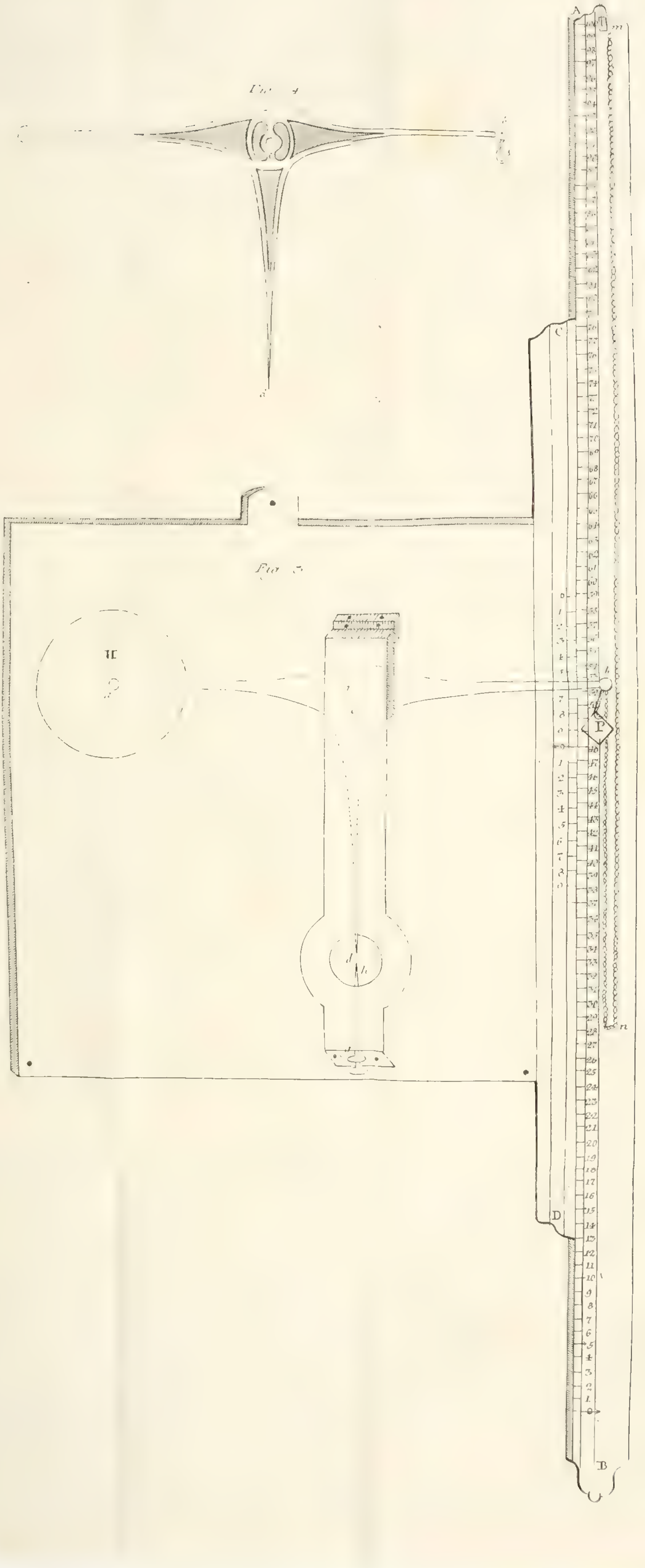

A
B
C
D
G
H
K
M
L
O
E
F
N


C
Fig. 1
G
E
B
K
A
P
A
I
B
H
2
F
3
A
E
B
C
D
F


C
Fig. 1
M
D
G
L
K
B
A
I
O
P
A
I
B
Fig. 2
H
E
S
Fig. 3
A
E
B
C
D
F

Acad. Sc. Petropol. Tom. II P. II Tab. V




Fig 4
Fig 3
A
B
C
D
P
m
n
H

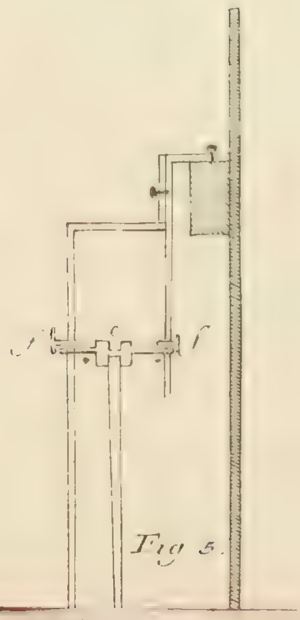


Fig 5.

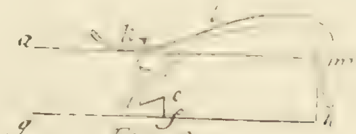


Fig 2.

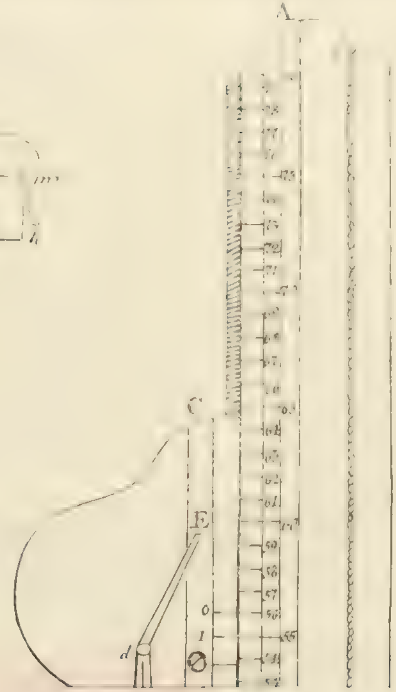


Fig 1.

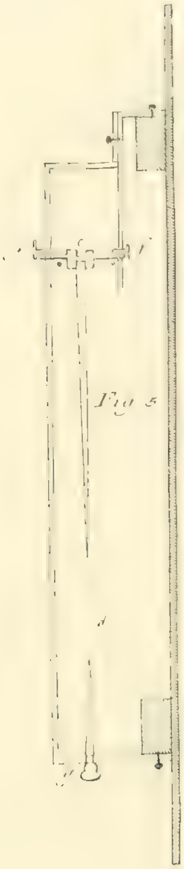


Fig 5

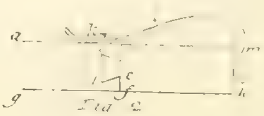


Fig 2



Fig 6.

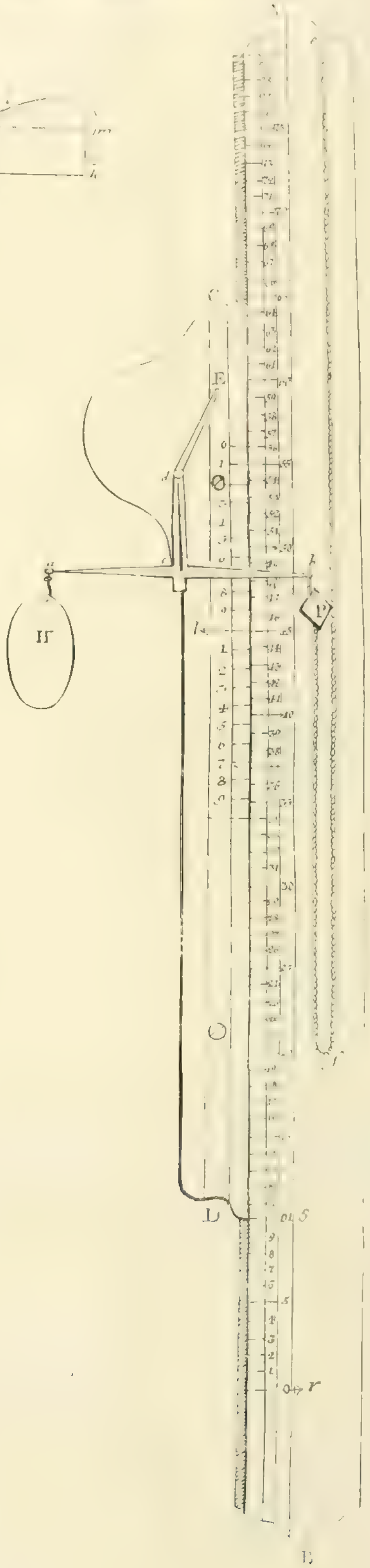
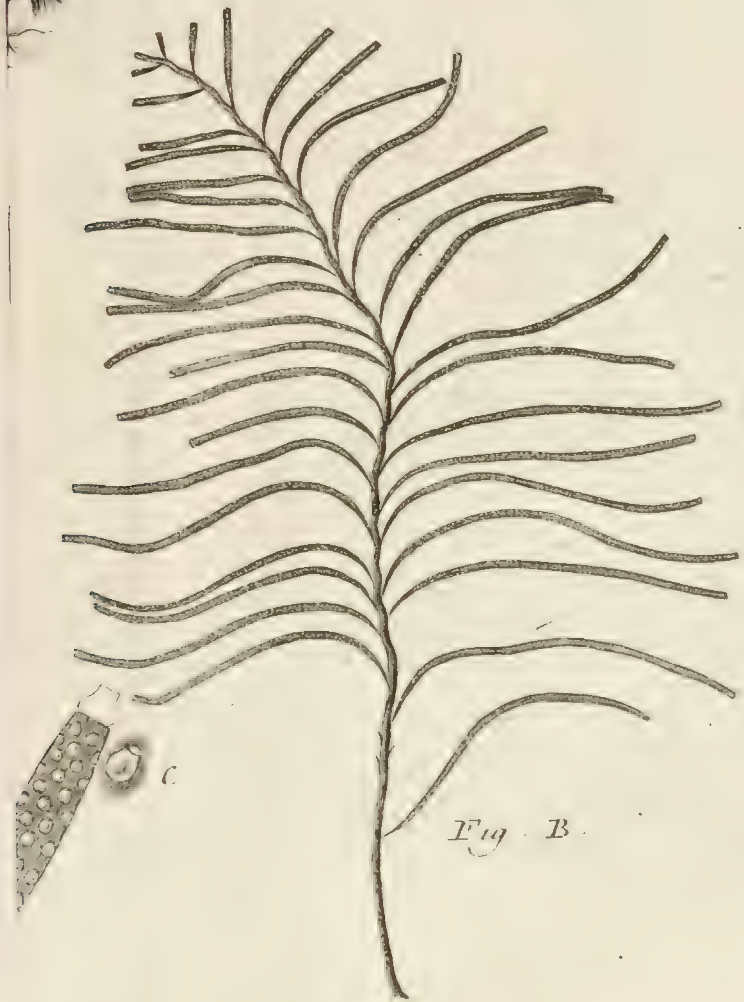


Fig 1



Fig. A.



C

Fig. B.



Fig A.

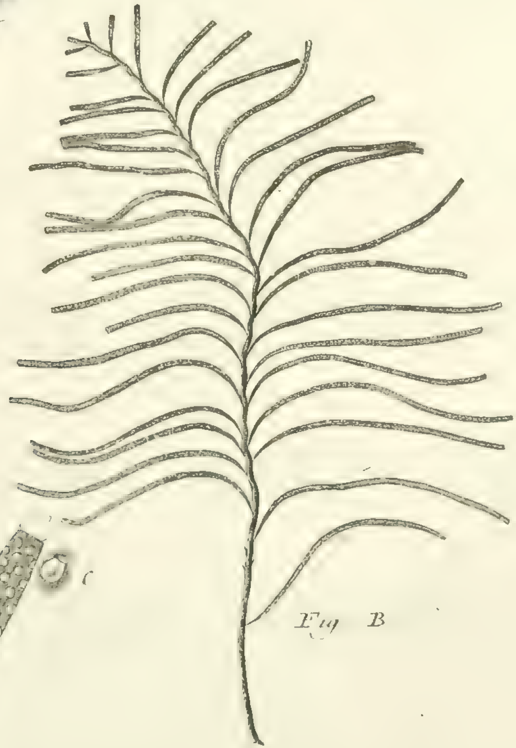
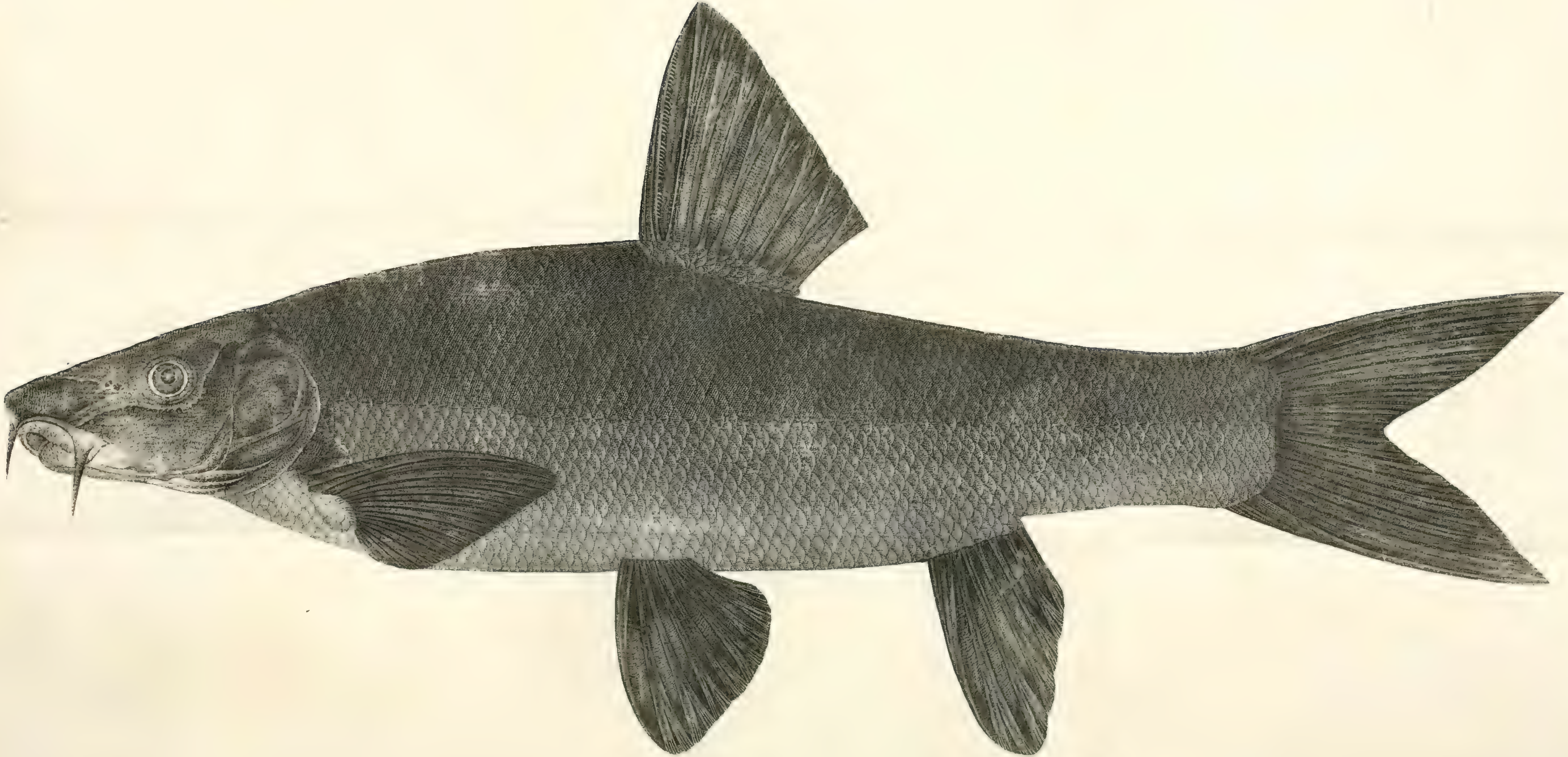


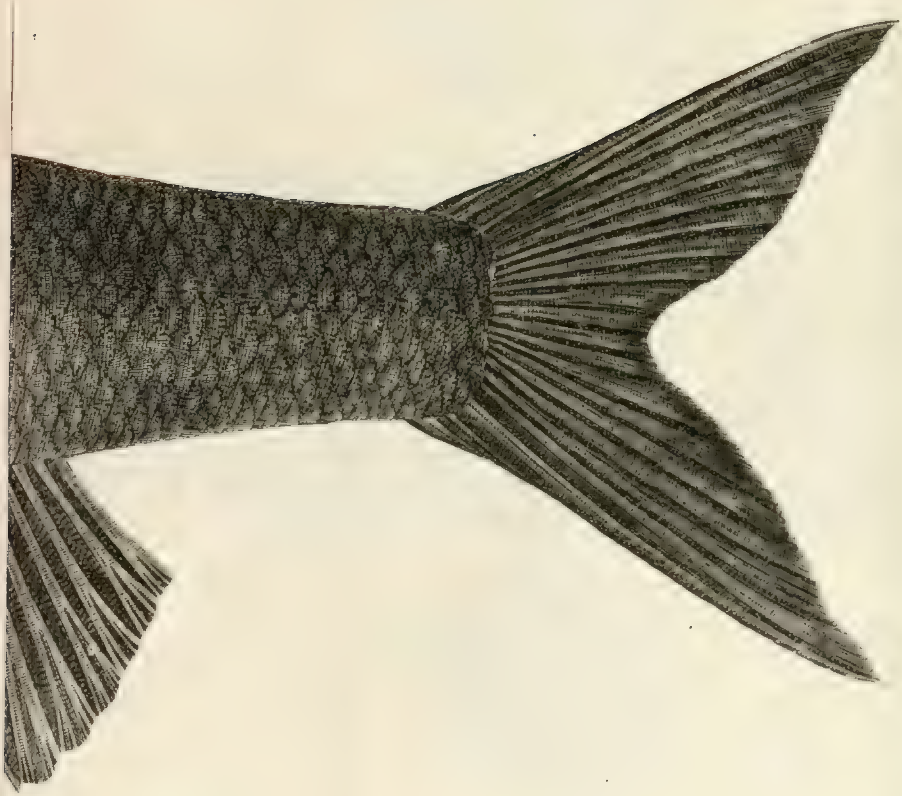
Fig B

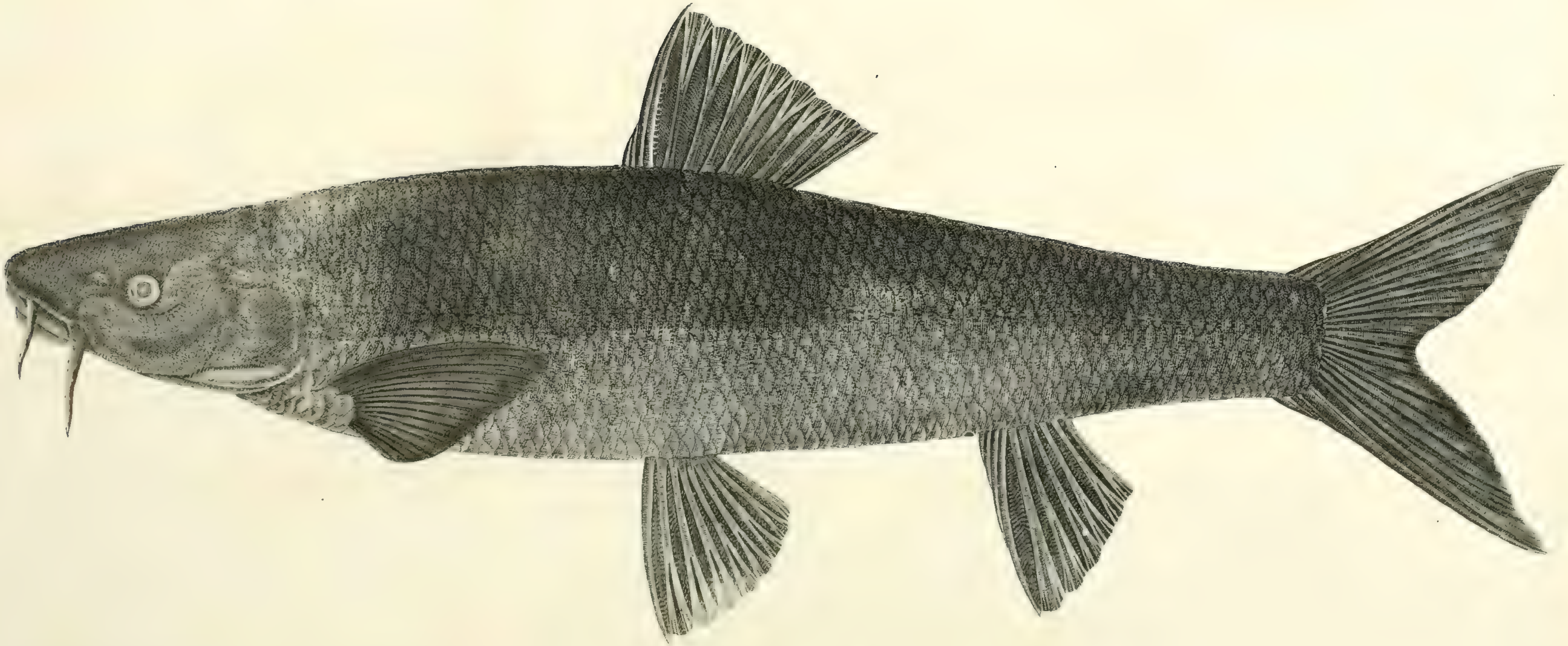


c

b







Acta. Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. II. P. II. Tab. X.



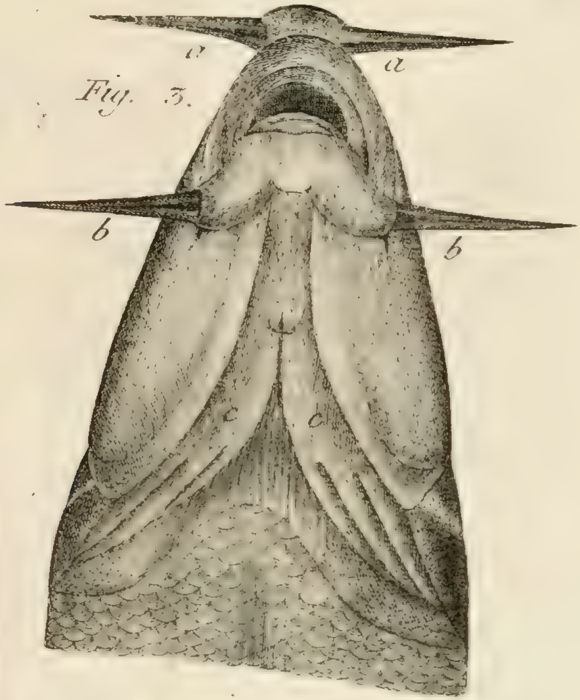
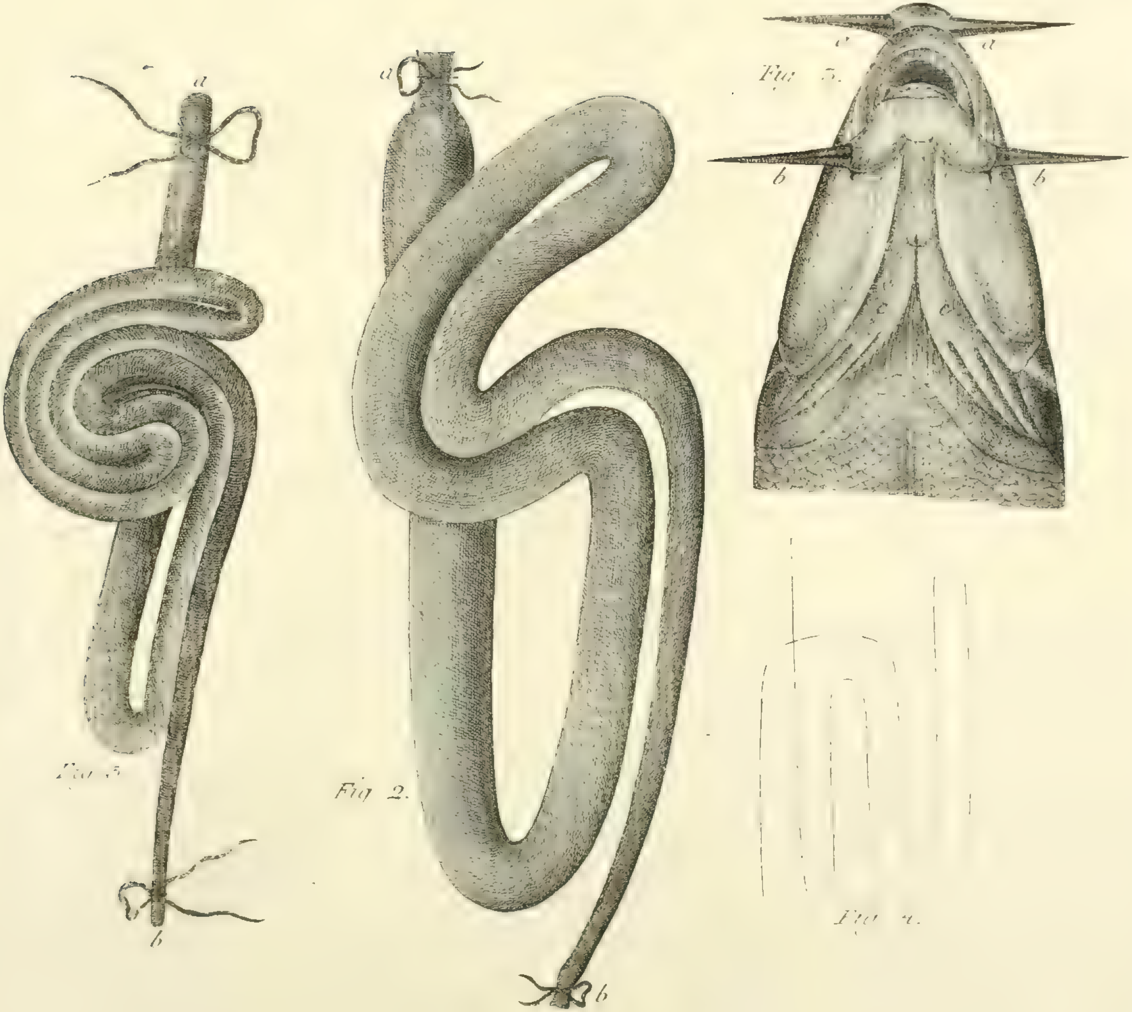
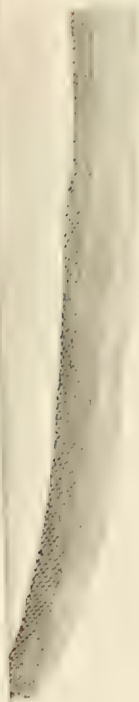


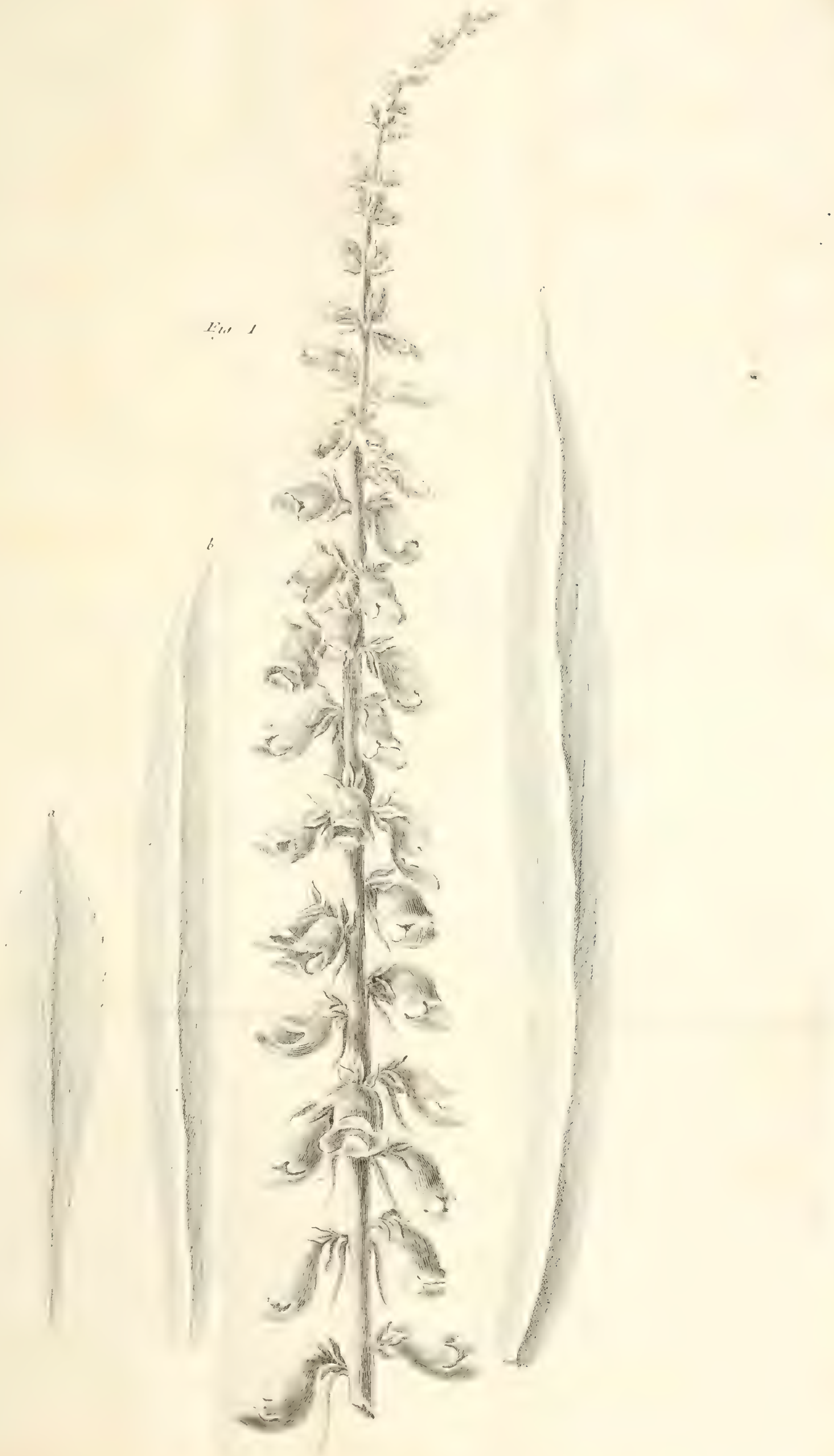
Fig. 3.



Fig. 4.


Fig 2.
Fig 3.
Fig 4.
a
b
c




Fig. 1
a
b
c

Act. Acad. Sc. Petr. 1778. II.

Analysis Chemica agarici fugitivi et boletorum bovini atque igniarii auct. Georgi. p. 207.

De inconstantia fabricae corporis humani, de eligendisque ad eam repraesentandam exemplaribus auct. Wolff. p. 217

Novae Pennatulae et ~~[illegible]~~ Sertulariae species descriptae a Lepechin. p.

1.) Pennatula cervinca p. 236 t. VII. f. A

2.) Sertularia obsoleta p. 137. t. VII. f. B.

Cyprinus Barbus et Cyprinus Capito descripti auct. Güldenstädt.

Cyprinus Barbus p. 139. t. VIII.

Cyprinus Capito. p. 248 t. IX. X

Appendix Observationum ad historiam reliquorum cyprinorum ciprafluviatilium

forum.

1.) De Carpione. p. 253.

2.) De Gobione p. 255.

3.) De Tinca. p. 259.

Digitales hybridae autore Kölreuter

Acta ac. Sc. Petr. pr. ann. 1778. P. II

Plan einer Beschreibung des Russischen Reichs von Lepechin p. 1
Brief von Hahn an Pallas über den Schlangenberg, die Witterung von Barnaul, u. einem Viehsterben von Haarwürmern bewirkt. p. 32
Nachricht von der Anatomie einer vollkommen zweikörperichen ~~Monstrum~~, menschlichen Mißgeburt, von Wolff. p. 41
Beobachtung eines Nordlichts in St. Petersburg p. 45
Lycia hybrida auctore Kölreuter. p. 219
De Conferva natura disquisitio chemica auct. Georgi. p. 225
Descriptio ossiculi fellea Tigridis, ejusque cum leonina et humana comparatio, auct. Wolf. p. 234. t. VII f. 1 & 2.
Oniscorum species descripta ab Lepechin.
1.) Oniscus aculeatus p. 247. t. VIII. f. 1.
2.) —— scorpioides p. 248. t. VIII. f. 2
3.) —— cuspidatus p. 249 t. VIII f. 3.
Antilope subgutturosa descripta a Güldenstädt. p. 251 t. 9–12.
Vorher einige Bemerkungen über die Antelopenarten und ~~vom~~ über des jüngern Gmelins Naturbeobachtungen.

AMNH LIBRARY
100125006